



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Термички процеси у електроенергетици**

**Материјали за рачунске вежбе**

Октобар 2017.

## ЗАДАТАК 1

Површина равне плоче ширине  $w = 1 \text{ m}$  се одржава на константној температури  $\vartheta_p = 230^\circ\text{C}$ , користећи независно контролисане тракасте електричне грејаче, од којих је сваки  $L = 50 \text{ mm}$  дугачак. Преко плоче струји ваздух температуре  $\vartheta_\infty = 25^\circ\text{C}$ , брзином од  $60 \text{ m/s}$ . Колика је снага загревања на грејачу на коме она достиже максималну вредност да би се остварио специфицирани режим?

Вредности параметара ваздуха на температури од  $400 \text{ K}$ , што представља средњу вредност температуре површи и ваздуха, и притиску од  $1$  атмосфере, износе: конематска вискозност  $\nu = 26.41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , специфична топлотна проводност  $\lambda = 0.0338 \text{ W}/(\text{m K})$ , *Prandtl*-ов број  $Pr = 0.69$ .

### *Решење*

Снаге загревања појединих грејача морају бити различите да би се одржала константна температура површи плоче јер се дуж плоче мења коефицијент преласка топлоте струјањем (доведена електрична снага је једнака снази којом се енергија струјањем преноси са површи грејача на ваздух –  $\alpha S (\vartheta_p - \vartheta_\infty)$ ). Максимална снага се има на оном грејачу где је максимална средња вредност коефицијента преласка топлоте. Дакле, да би се решио задатак, потребно је анализирати вредности средњих коефицијената преласка топлоте струјањем на сваком од грејача, користећи изразе (18) – (32) (<http://term-procesi.etf.bg.ac.rs/predavanja.html> / Часови 4-6). За почетак ћемо одредити да ли и на ком од грејача долази до промене режима струјања из ламинарног у турбулентни. За вредност критичног *Reynolds*-овог броја  $Re_{xc} = 5 \cdot 10^5$ , из израза (19) се долази до координате на којој „настаје“ турбулентно струјање:

$$x_c = \frac{\nu}{u_\infty} Re_{xc} = \frac{26.41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{60 \text{ m/s}} 5 \times 10^5 = 0.22 \text{ m} \quad (1.1)$$

То значи да је струјање ваздуха на прва четири грејача ламинарно, на петом на првих  $20 \text{ mm}$  петог грејача ламинарно, а на осталих  $30 \text{ mm}$  турбулентно, а на грејачима после петог турбулентно.

У дискусији која следи једначину (22) је објашњено да коефицијент преласка топлоте струјањем у области ламинарног струјања опада са повећањем растојања од ивице плоче, због чега је он засигурно највећу вредност у области од првог до четвртог грејача достиже на првом грејачу.

У области турбулентног струјања, коефицијент преласка топлоте струјањем се са растојањем од ивице плоче мења на следећи начин (израз се добија из (20), (25) и (19) – прецизније у изразу (19) карактеристична димензија је растојање од ивице плоче  $x$ ):

$$\alpha_x(x) = \frac{\lambda \left( 0.0296 \left( \frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{4/5} Pr^{1/3} \right)}{x} \quad (1.2)$$

Коефицијент преласка топлоте је обрнуто сразмеран са  $x^{1/5}$ , што значи да опада са растојањем. Дакле, у области од шестог грејача надаље, средња вредност коефицијента преласка топлоте струјањем има највећу вредност на шестом грејачу.

Дакле, „кандидати“ за највећу средњу вредност коефицијента преласка топлоте су први, шести и пети грејач, на коме постоји и област ламинарног и област турбулентног струјања.

Снага загревања првог грејача се израчунава на следећи начин. Из основног закона преноса топлоте зрачењем:

$$q_1 = \bar{\alpha}_1 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.3)$$

Из израза (19)

$$Re_1 = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{60 \text{ m/s} \cdot 0.05 \text{ m}}{26.41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1.14 \cdot 10^5 \quad (1.4)$$

Из израза (23)

$$\bar{N}_{u1} = 0.664 Re_1^{1/2} Pr^{1/3} = 0.664 (1.14 \cdot 10^5)^{1/2} (0.69)^{1/3} = 198 \quad (1.5)$$

Из израза (24)

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\lambda \bar{N}_{u1}}{L_1} = \frac{198 \cdot 0.0338 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{0.05 \text{ m}} = 134 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \quad (1.6)$$

$$q_1 = 134 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \cdot (0.05 \times 1) \text{ m}^2 (230 - 25)^0 \text{ C} = 1370 \text{ W} \quad (1.7)$$

За грејаче 5 и 6 најбржи начин да се одреде средње вредности коефицијената преласка топлоте струјањем је да се употребе готови изрази за средње вредности коефицијента преласка топлоте од почетка плоче до задате координате  $x$  ((24) и (23), односно (28) и (32)). Пре него што се то учини, потребно је направити кратку анализу и успоставити релацију између средње вредности коефицијената преласка топлоте струјањем на деоници од растојања  $x_1$  до растојања  $x_2$  ( $\alpha_{1-2}$ ), с једне стране, и коефицијената преласка топлоте на деоницама од  $x = 0$  до  $x_1$  ( $\alpha_1$ ), односно од  $x = 0$  до  $x_2$  ( $\alpha_2$ ). Релација се једноставно успоставља на основу дефиниције средњих вредности коефицијената преласка топлоте и елементарне математичке особине интеграла:

$$\alpha_{1-2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left( \int_0^{x_2} \alpha(x) dx - \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \right) = \frac{1}{x_2 - x_1} \left( x_2 \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} \alpha(x) dx - x_1 \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \right) \quad (1.8)$$

$$\alpha_{1-2} = \frac{\alpha_2 x_2 - \alpha_1 x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.9)$$

На основу претходног се једноставно израчунавају снаге загревања петог и шестог грејача.

Снага загревања петог грејача:

$$q_5 = \bar{\alpha}_{1-5} 5L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) - \bar{\alpha}_{1-4} 4L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.10)$$

$$q_5 = (\bar{\alpha}_{1-5} 5L - \bar{\alpha}_{1-4} 4L) w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.11)$$

Израчунавање коефицијената преласка топлоте потребних у претходном изразу:

$$\bar{N}_{u4} = 0.664 Re_4^{1/2} Pr^{1/3} \quad (1.12)$$

$$Re_4 = 4 Re_1 = 4.56 \times 10^5 \quad (1.13)$$

$$\bar{N}_{u4} = 0.664 Re_4^{1/2} Pr^{1/3} = 0.664 (4.56 \times 10^5)^{1/2} (0.69)^{1/3} = 396 \quad (1.14)$$

$$\bar{\alpha}_{1-4} = \frac{\lambda \bar{N}_{u4}}{4L} = \frac{396 \times 0.0338 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{0.2 \text{ m}} = 67 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \quad (1.15)$$

$$Re_5 = 5 Re_1 = 5.70 \times 10^5 \quad (1.16)$$

$$\bar{N}_{u5} = (0.037 Re_5^{4/5} - 871) Pr^{1/3} = (0.037 (5.70 \times 10^5)^{4/5} - 871)^{1/3} = 546 \quad (1.17)$$

$$\bar{\alpha}_{1-5} = \frac{\lambda \bar{N}_{u5}}{5L} = \frac{546 \times 0.0338 \text{ W/(mK)}}{0.25 \text{ m}} = 74 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \quad (1.18)$$

Заменом вредности коефицијената преласка топлоте у израз за снагу загревања (снагу која се одводи са површи струјањем ваздуха):

$$q_5 = (74 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0.25 \text{ m} - 67 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0.20 \text{ m}) \cdot 1 \text{ m} \cdot (230 - 25) \text{ K} = 1050 \text{ W} \quad (1.19)$$

Снага загревања шестог грејача:

$$q_6 = \bar{\alpha}_{1-6} 6L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) - \bar{\alpha}_{1-5} 5L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.20)$$

$$q_6 = (\bar{\alpha}_{1-6} 6L - \bar{\alpha}_{1-5} 5L) w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.21)$$

Израчунавање средњег коефицијената преласка топлоте од почетка плоче до краја шестог грејача:

$$R_{e6} = 6R_{e1} = 6.84 \times 10^5 \quad (1.22)$$

$$\bar{N}_{u6} = (0.037 (6.84 \times 10^5)^{4/5} - 871) 0.69^{1/3} = 753 \quad (1.23)$$

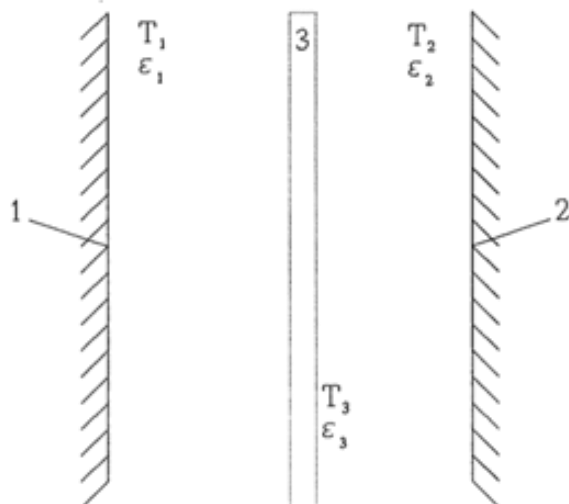
$$\bar{\alpha}_{1-6} = \frac{\lambda \bar{N}_{u6}}{6L} = \frac{753 \cdot 0.038 \text{ W/(mK)}}{0.30 \text{ m}} = 85 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \quad (1.24)$$

Заменом вредности коефицијената преласка топлоте у израз за снагу загревања:

$$q_6 = (85 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0.30 \text{ m} - 74 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0.25 \text{ m}) \cdot 1 \text{ m} \cdot (230 - 25) \text{ K} = 1440 \text{ W} \quad (1.25)$$

Однос снага загревања на три „кандидата“ (грејач 1, грејач 5 и грејач 6) за највећу снагу загревања је  $q_6 > q_1 > q_5$ , што значи да је максимална снага загревања 1440 W.

**ЗАДАЦИ из збирке 15, 16 (са применом радијационих шема), 17, 18, 24, 25, 26, 27**  
<http://term-procesi.etf.bg.ac.rs/dokumenti/vezbe%20na%20tabli/ZbirkaDeo2.pdf>



Slika 15.1

**15. a)** Izvesti izraz za površinsku gustinu snage kojom se energija razmenjuje zračenjem između dve paralelne velike površi 1 i 2, koje se nalaze na temperaturama  $T_1$  i  $T_2$  i čije površi imaju svojstva idealno sivog tela, koeficijenta sivoće  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ , respektivno. Apsorpciona svojstva površi su karakterisana koeficijentima apsorpcije, koji su jednaki koeficijentima sivoće (emisivnostima).

Zbog veličine površi se može smatrati da su ivični efekti zanemarljivo mali.

**b)** Kakav se efekat postiže postavljanjem zastora (ekrana) između tih površi? Koeficijent sivoće ekrana (ploče koja se umeće) iznosi  $\varepsilon_3$ .

### Rešenje:

a) Prema zakonima zračenja sa dela površi 1, površine  $S$  (koja se nalazi na temperaturi  $T_1$ ), se emituje energija snagom  $q_1$ . Osim toga, od nje se reflektuje i deo energije koji usled zračenja dolazi sa površi 2 i ponovo se vraća ka površi 2. Na osnovu toga se za ukupnu snagu kojom se energija prenosi zračenjem sa dela površi 1 može napisati

$$q_{1u} = q_1 + (1 - A_1) q_{2u}. \quad (15.1)$$

Analogno, ukupna snaga kojom se energija prenosi zračenjem sa dela površi 2 iznosi

$$q_{2u} = q_2 + (1 - A_2) q_{1u}. \quad (15.2)$$

$q_{iu}$ ,  $q_i$  i  $A_i$  predstavljaju ukupnu snagu prenosa energije zračenjem, snagu zračenja saglasno Stefan-Boltzman-ovom zakonu i koeficijent apsorpcije površi  $i$  ( $i = 1, 2$ ).

Rešavanjem prethodnog sistema dve jednačine sa dve nepoznate ( $q_{1u}$  i  $q_{2u}$ ) se dobija

$$q_{1u} = \frac{q_1 + q_2 - A_1 q_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \quad (15.3)$$

$$q_{2u} = \frac{q_1 + q_2 - A_2 q_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (15.4)$$

Snaga kojom se energija razmenjuje zračenjem između delova posmatranih površi se dobija kao razlika ovih snaga, što se za  $T_1 > T_2$  iskazuje jednačinom

$$q = q_{1u} - q_{2u}. \quad (15.5)$$

Zamenom izraza za  $q_{1u}$  i  $q_{2u}$  se dobija

$$q = \frac{A_2 q_1 - A_1 q_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (15.6)$$

Ako se u izrazu (15.6) izvrše zamene  $A_i = \varepsilon_i$  (koeficijent apsorpcije tela je jednak njegovom koeficijentu sivoće) i

$$q_i = C_i \left( \frac{T_i}{100} \right)^4 \quad S = C_c \varepsilon_i \left( \frac{T_i}{100} \right)^4 S \quad (15.7)$$

(Stefan-Boltzman-ov zakon zračenja sivog tela - izrazi (II.3) i (II.4)), dobija se izraz za traženu snagu, koji glasi

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S. \quad (15.8)$$

Iz njega se jednostavno dolazi i do traženog izraza za površinsku gustinu snage kojom se energija zračenjem razmenjuje između ovih površi, deljenjem snage sa površinom  $S$ . On glasi

$$q_s = \frac{q}{S} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (15.9)$$

$C_c$  predstavlja konstantu zračenja crnog tela, koja je jednaka Stefan-Boltzman-ovoj konstanti pomnoženoj sa  $10^8$  ( $C_c = \sigma_c \cdot 10^8 = 5,67 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ ).  $C$  predstavlja konstantu zračenja sivog tela i jednaka je proizvodu konstante zračenja crnog tela i koeficijenta sivoće ( $\varepsilon$ ).

Kao brojni primer, posmatrajmo kako se menja površinska gustina snage ( $q_s$ , u  $\text{kW/m}^2$ ), kojom se energija razmenjuje izmedju površi čija je emisivnost  $\varepsilon_1 = 0,8$  i površi čija je emisivnost  $\varepsilon_2 = 0,4$ , a temperatura  $T_2 = 293 \text{ K}$  u zavisnosti od temperature  $T_1$  (K). Rezultat izračunavanja se daje skupom parova ( $T_1, q_s$ ):

$$\{(673; 4,1), (773; 7,2), (873; 11,8), (973; 18,3), (1073; 27,2), (1173; 38,9)\}$$

b) Za razmenu energije izmedju površi 1 i 3, odnosno 3 i 2 (slika 15.1) važi ista relacija koja je izvedena za slučaj razmene energije zračenjem izmedju površi 1 i 2, kada izmedju njih ne postoji zastor. Dakle, može se napisati

$$q_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right) S, \quad (15.10)$$

odnosno

$$q_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left( \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S. \quad (15.11)$$

Pri pisanju jednačina (15.10) i (15.11) je pretpostavljeno stacionarno stanje i zanemaren je toplotni otpor provodjenju toplote kroz ploču 3 (zastor), iz čega sledi da su obe granične površi zastora na istoj temperaturi.

Za dalje rešavanje je pogodno uvesti oznake:

$$C_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \quad (15.12)$$

$$C_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (15.13)$$

U stacionarnom stanju snage razmene energije izmedju površi 1 i zastora, odnosno površi 2 i zastora ( $q_{13}$  i  $q_{32}$ ) su jednake, pa se može napisati jednačina

$$C_{13} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right) = C_{32} \left( \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (15.14)$$

Njenim rešavanjem po temperaturi  $T_3$  se dobija

$$\left(\frac{T_3}{100}\right)^4 = \frac{C_{13} \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + C_{32} \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{C_{13} + C_{32}}. \quad (15.15)$$

Zamenom prethodnog izraza u izraz (15.10), dobija se izraz za snagu razmene energije izmedju površi 1 i 2 kada se izmedju njih nalazi radijacioni ekran. On glasi

$$q = q_{13} = q_{32} = \frac{C_{13} C_{32}}{C_{13} + C_{32}} \left( \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S. \quad (15.16)$$

Zamenom vrednosti  $C_{13}$  i  $C_{32}$  se dobija konačan izraz za snagu razmene energije zračenjem izmedju dve beskonačno velike paralelne površi izmedju kojih je postavljen zastor. On glasi

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)} \left( \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S. \quad (15.17)$$

Efekat postavljanja zastora se može najbolje uočiti ako se uporede izrazi (15.8) i (15.17). Postavljanjem zastora se smanjuje snaga razmene energije zračenjem. Za male vrednosti emisivnosti ekrana ( $\varepsilon_3$ ) taj efekat je naročito izražen (za  $\varepsilon_3 \rightarrow 0$   $q \rightarrow 0$ ). Ova pojava se u praksi veoma često primenjuje u cilju smanjenja razmene energije zračenjem.

Primera radi, površinska gustina snage kojom se energija razmenjuje izmedju dve paralelne velike površi, čije su emisivnosti  $\varepsilon_1 = 0,8$  i  $\varepsilon_2 = 0,4$ , ubacivanjem aluminijumskog zastora (čija je emisivnost  $\varepsilon_3 = 0,05$ ) se smanjuje za 93,4 %. Ovaj rezultat se dobija na osnovu izraza (15.8) i (15.17) i ne zavisi od temperatura  $T_1$  i  $T_2$ .



## ЗАДАТАК 15 – решење преко радијационе шеме

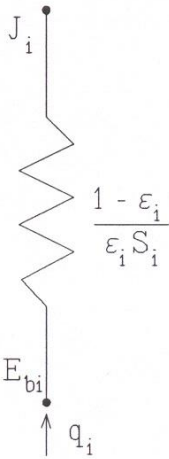
На часовима предавања (Часови\_7\_до\_9), су изведене формуле за:

1. Снагу којом се енергија одводи са површи тела која се може приказати елементом мреже са слике 15.2:

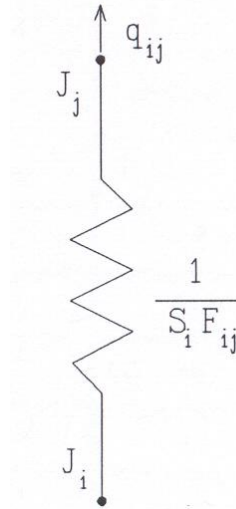
$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}} .$$

2. Снагу размене енергије између две површи ( $i$  и  $j$ ), која се може приказати елементом мреже датим на слици 15.3:

$$q_i = \sum_{j=1}^N S_i F_{ij} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^N q_{ij} ,$$



Слика 15.2



Слика 15.3

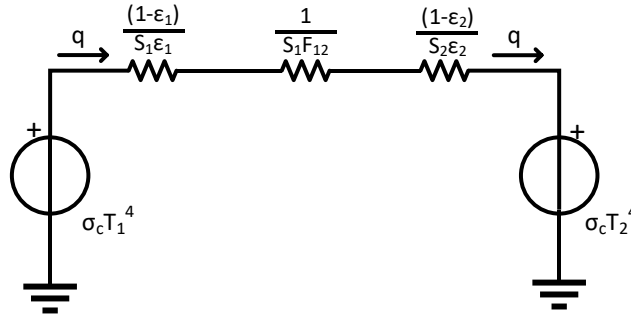
На основу представљених формула и њихових графичких приказа лако се могу формирати радијационе шеме.

**а)** За случај две паралелне велике површи на температурама  $T_1$  и  $T_2$  биће формирана радијациона шема са два чвора чији се потенцијали одређују на основу израза за површинску густину снаге зрачења црног тела на датим температурама.

Између ових чворова се размеђује енергија зрачењем кроз отпоре који узимају у обзир

- 1) несавршеност зрачења сивог тела, преко емисивности и
- 2) количину енергије која доспева са једног на друго тело, преко фактора виђења.

Дакле, снага размене енергије зрачењем између две површи на свом путу „види“ три елемента отпорности, као што је то приказано на слици 15.4.



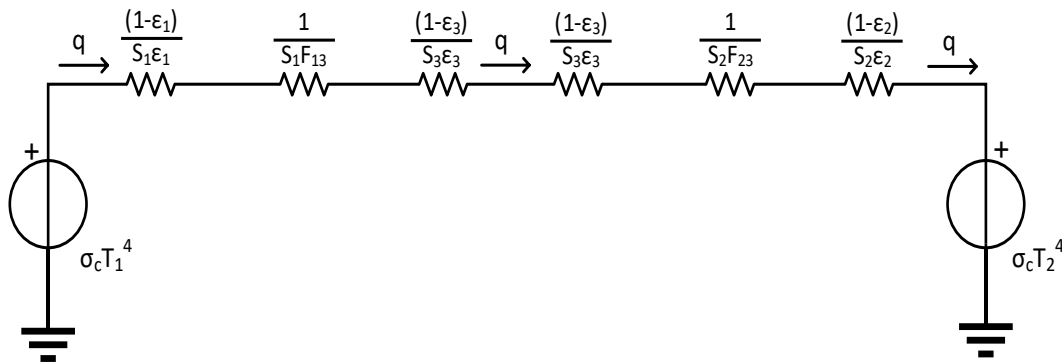
Слика 15.4 – Радијациона шема за две паралелне површи

На основу приказане радијационе шеме се лако долази до израза за снагу којом се енергија размењује између две велике паралелне површи, при чему се претпоставља да су им површине једнаке ( $S$ ) и да је фактор виђења између њих 1.

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\frac{1}{\epsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S$$

Лако је пуочити да је добијен исти израз као једнакост (15.8) изведена у збирци.

**б)** У случају постојања екрана између две велике паралелне површи могуће је формирати једну радијациону шему приказану на слици 15.5. У екрану (уметнутој плочи) нема ни извора ни понора енергије, односно енергија која долази од површи 1 ка површи 3 одлази од површи 3 ка површи 2 (претпоставка да је површ 1 топлија од површи 2).



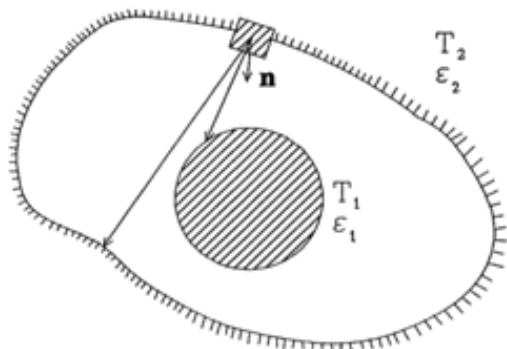
Слика 15.6 – Радијациона шема за две паралелне површи са екраном између њих

Сада се лако може написати израз за снагу размене енергије зрачењем између две велике паралелне површи који одговара изразу 15.7 из збирке:

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{13} S_1} + \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1}{F_{23} S_2} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

$$= \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{13}} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{23}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2\left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)} \left( \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S$$



Slika 16.1

**Rešenje:**

Osnovna razlika od slučaja koji se ima pri razmeni energije između dve paralelne, beskonačno velike površi (zadatak 15) je u tome što samo deo energije koju emituje površ 2 ( $k q_{2u}$ ) stiže do površi 1, dok ostatak ( $(1-k) q_{2u}$ ) stiže na površ 2.

Kao i u prethodnom zadatku, na osnovu energetskog bilansa se može napisati jednačina

$$q_{1u} = q_1 + (1 - A_1) k q_{2u}, \quad (16.1)$$

odnosno

$$q_{2u} = q_2 + (1 - A_2) q_{1u} + (1 - A_2) (1 - k) q_{2u}. \quad (16.2)$$

$q_{iu}$ ,  $q_i$  i  $A_i$  predstavljaju ukupnu snagu, snagu zračenja saglasno *Stefan-Boltzman*-ovom zakonu i koeficijent apsorpcije tela  $i$  ( $i = 1, 2$ ).  $k$  je koeficijent kojim se iskazuje koliki deo energije koja se emituje sa površi tela 2 stiže do površi tela 1. Njegova vrednost se nalazi u intervalu  $[0, 1]$ .

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina sa dve nepoznate ( $q_{1u}$  i  $q_{2u}$ ) se dobija

$$q_{1u} = \frac{A_2 q_1 + k(1 - A_2) q_1 + (1 - A_1) k q_2}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k} \quad (16.3)$$

**16.** Izvesti izraz za snagu kojom se energija razmenjuje zračenjem između površi 1 i 2 (gde površ 2 obuhvata površ 1 - slika 16.1) koje se nalaze na temperaturama  $T_1$  i  $T_2$  i i čije površi imaju svojstva idealno sivih tela, koeficijenata sivoće  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$ , respektivno. Koeficijenti apsorpcije su jednaki koeficijentima sivoće. Površina površi između kojih se razmenjuje energija zračenjem iznose  $S_1$  i  $S_2$ .

$$q_{2u} = \frac{q_2 + (1 - A_2) q_1}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k} \quad (16.4)$$

Snaga kojom se energija razmenjuje zračenjem između posmatranih površi se dobija kao razlika snage kojom se u nekom trenutku, pri stacionarnom stanju, energija prenosi od površi 1 ka površi 2 i snage kojom se energija, u istom trenutku, prenosi od površi 2 ka površi 1:

$$q = q_{1u} - k q_{2u} \quad (16.5)$$

Zamenom izraza za  $q_{1u}$  i  $q_{2u}$  iz (16.3) i (16.4) u izraz (16.5) se dobija

$$q = \frac{A_2 q_1 - A_1 k q_2}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k} \quad (16.6)$$

Na osnovu jednakosti koeficijenta apsorpcije i koeficijenta sivoće ( $A = \varepsilon$ ) i *Stefan-Boltzman*-ovog zakona zračenja sivog tela, izraz (16.6) postaje

$$q = \frac{C_c \varepsilon_1 \varepsilon_2}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k} \left( S_1 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - k S_2 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (16.7)$$

Konačno, potrebno je odrediti vrednost koeficijenta  $k$ . On se određuje iz uslova da je snaga razmene energije zračenjem jednaka nuli u slučaju da su jednake temperature površi 1 i 2 ( $T_1 = T_2 = T$ ). Uvodjenjem tog uslova u jednačinu (16.7) se dobija da je  $k = S_1/S_2$ . Kada se ova vrednost koeficijenta  $k$  zameni u izraz (16.7), dobija se konačni izraz za snagu kojom se energija razmenjuje zračenjem između površi površina  $S_1$  i  $S_2$ . On glasi

$$q = \frac{C_c S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (16.8)$$

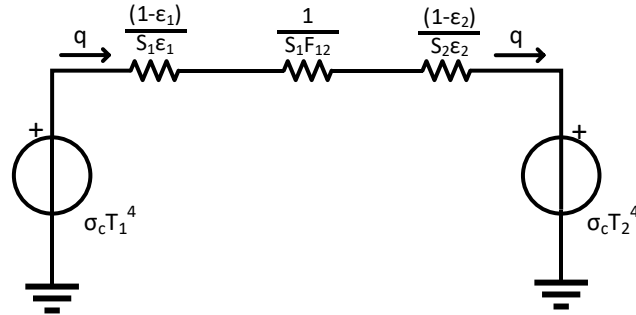
Kao brojni primer, posmatrajmo kako se menja snaga ( $q$ , u kW), kojom se energija razmenjuje između unutrašnje površi, čija je emisivnost  $\varepsilon_1 = 0,4$ , temperatura  $T_1 = 1073$  K i površina  $S_1 = 1$  m<sup>2</sup> i spoljašnje površi, čija je emisivnost  $\varepsilon_2 = 0,8$ , a temperatura  $T_2 = 293$  K, u zavisnosti od odnosa površina  $S_1/S_2$ . Rezultat izračunavanja se daje skupom parova ( $S_1/S_2, q$ ):

{(→0; 29,9), (1/8; 29,5), (1/4; 29,2), (1/2; 28,5), (3/4; 27,8), (7/8; 27,5), (→1; 27,2)}.

Vidi se da je opseg varijacije snage mali (promena za svega 10 %). To je rezultat malog koeficijenta sivoće tela 1 ( $\varepsilon_1$ ) u odnosu na koeficijent sivoće tela 2 ( $\varepsilon_2$ ).

### ЗАДАТАК 16 – решење преко радијационе шеме

Решење задатка се своди на постављање радијационе шеме са два чвора, по један за свако од тела на различитим температурама и различитих површина.



Слика 16.2 – Радијациона шема за две површи које су једна у другој

У овом примеру површине два тела нису једнаке, а фактор виђења између прве и друге површи је једнак 1, јер како друга површ окружује прву, јасно је да све што се израчи са површи 1 доспева на површ 2.

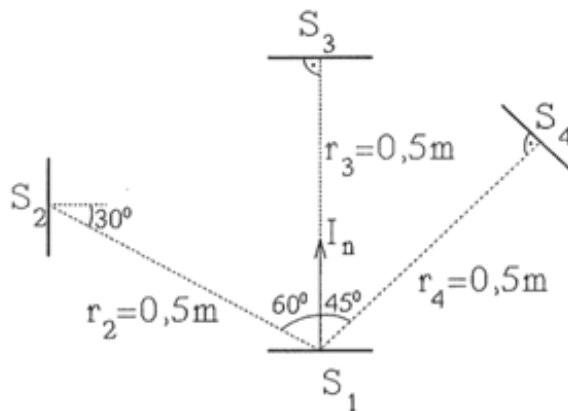
На основу приказане радијационе шеме добија се израз за снагу размене енергије између две површи од којих се прва налази унутар друге:

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S_1}{\frac{1}{\epsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)}$$

$$q = \frac{C_c S_1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right)$$

Добијена једнакост одговара изразу 16.8 из збирке задатака.

**17.** Mala površ površine  $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$  zrači difuzno. Izmerena vrednost jačine zračenja u pravcu normale, po jedinici površine površi koja zrači iznosi  $I_{n,s} = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$ . Zračenju ove male površi su izložene tri površi površina  $S_2 = S_3 = S_4 = 10^{-3} \text{ m}^2$ , koje su udaljene 0,5 m od površi  $S_1$  (koristitiće se ista oznaka za površ i vrednost njene površine).



Slika 17.1

**Rešenje:**

a) Kod difuznog izvora zračenja, vrednost jačine zračenja sa njegove elementarne površi, podeljena sa površinom elementarne površi projektovanom na pravac zračenja, je ista u svim pravcima, što se iskazuje jednačinom

$$\frac{I_n}{dS} = \frac{I_\varphi}{dS \cos \varphi}. \quad (17.1)$$

Iz ovog uslova se dobija veza izmedju jačine zračenja u proizvoljnom pravcu, definisanom uglom  $\varphi$  (u odnosu na normalu) i jačine zračenja u pravcu normale, koja glasi

$$I_\varphi = I_n \cos \varphi. \quad (17.2)$$

Dakle, raspodela jačine zračenja kod difuznog izvora se vrši po *Lambert*-ovom kosinusnom zakonu (II.5). Primenom izraza (17.2) se dobijaju tražene vrednosti  $I_{2,s} = 3500 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$ ,  $I_{3,s} = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$  i  $I_{4,s} = 4950 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$ .

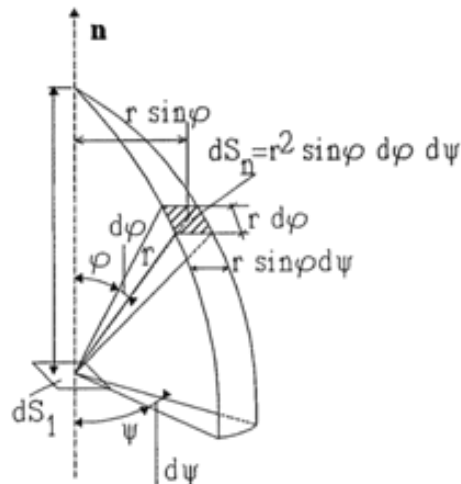
b) Elementarni prostorni ugao  $d\omega$  je definisan kao prostor ograničen zracima, povučenim iz centra sfere, kojima se vidi elementarni deo sfere. On je određen odnosom površine elementa sfere  $dS_n$  i kvadratom poluprečnika sfere:  $d\omega = dS_n / r^2$ .

a) Kolika je jačina zračenja po jedinici površine  $S_1$  u svakom od tri pravca, definisanim "tačkastim" površima  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$ ? Položaj i orijentacija površi  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  su prikazani na slici 17.1.

b) Pod kojim se prostornim uglovima iz "tačkaste" površi  $S_1$  vide površi  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$ ?

v) Kolika je snaga zračenja koja se sa površi  $S_1$  emituje do površi  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$ ?

Maloj površi proizvoljnog oblika i orijentacije odgovara prostorni ugao, pod kojim se ona vidi iz definisane tačke, koji je jednak odnosu površine njene projekcije na ravan upravnu na pravac određen definisanom tačkom i malom površi koja se posmatra i kvadrata rastojanja. Elementarni prostorni ugao koji odgovara pravcu definisanom uglovima  $\varphi$  i  $\psi$  u sfernom koordinatnom sistemu se određuje na način prikazan na slici 17.2.



$$d\omega = \frac{dS_n}{r^2} = \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$

Slika 17.2

Sve četiri površi sa slike 17.1 se mogu smatrati diferencijalnim ("tačkastim"), jer su  $S_j/r_j^2 \ll 1$ . Dakle,  $d\omega = dS_n / r^2$ , gde je  $dS_{n,j} = dS_j \cos \varphi_j$ , a  $\varphi_j$  ugao između pravca normale i pravca upadnog zračenja. Traženi prostorni uglovi imaju vrednosti:

$$\omega_{1-2} = \frac{10^{-3} \cos 30^\circ}{0,5^2} = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (17.3)$$

$$\omega_{1-3} = \frac{10^{-3} \cos 0^\circ}{0,5^2} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (17.4)$$

$$\omega_{1-4} = \frac{10^{-3} \cos 30^\circ}{0,5^2} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (17.5)$$

v) S obzirom da su sve površi diferencijalne ("tačkaste", "elementarne"), snaga zračenja koja se sa površi  $S_1$  emituje do površi  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$  se određuje kao proizvod prostornog ugla pod kojim se vidi površ  $S_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) i intenziteta u tom pravcu, odnosno prema izrazu



$$q_{1-i} = I_{\varphi_{1,i}} \omega_{1-i}, \quad (17.6)$$

gde je

$$I_{\varphi_{1,i}} = I_n \cos \varphi_{1,i} = I_{n,S} S_1 \cos \varphi_{1,i}. \quad (17.7)$$

U izrazu (17.7),  $\varphi_{1,i}$  predstavlja ugao između pravca i normale na površ  $S_1$ .

Primenom izraza (17.7), dobijaju se snage zračenja sa površi  $S_1$  do površi  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$ :  
 $q_{1-2} = 12,1$  mW,  $q_{1-3} = 28$  mW i  $q_{1-4} = 19,8$  mW.

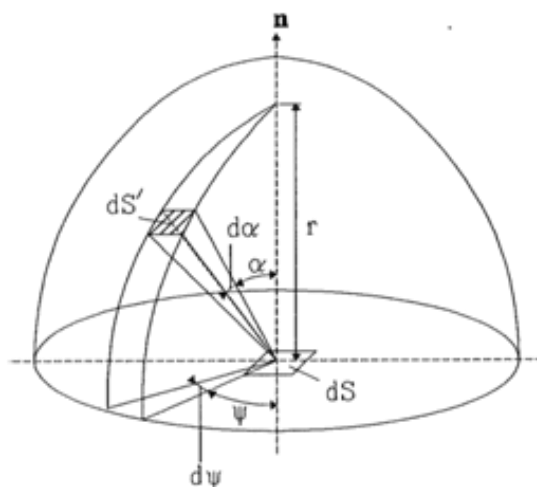
Zadržimo se na pojmovima tačkastog izvora zračenja i tačkastog prijemnika zračenja. Izvor zračenja se može posmatrati kao tačkasti ako se sa njegove svake elementarne površi tačka u kojoj se posmatra zračenje tela vidi pod istim uglom u odnosu na normalu. U tom slučaju su jačine zračenja sa svih elementarnih delova iste (bez obzira na njihovu prostornu raspodelu sa elementarnog dela površi); prostorna raspodela zračenja površi tela je zbirni rezultat zračenja sa njenih elementarnih delova. Raspodela zračenja sa elementarnih delova, kao karakteristika površi koja zrači, ima identičan oblik za sve elementarne površi. Izvor se tada može svesti na tačku, u odnosu na koju se mogu definisati i prostorni uglovi. Površ koja je prijemnik zračenja se može smatrati tačkastom površi ako se svi njeni delovi vide pod istim uglom sa svake od tačaka na površi izvora zračenja. Tada se mogu definisati prostorni uglovi pod kojima se sa svake elementarne površi izvora (sa svake tačke površi izvora) vidi prijemnik zračenja.

**18.** Ako je temperatura površi crnog tela jednaka  $T$ , kolika će biti jačina zračenja sa njegovog elementarnog dela po jedinici površine tog dela u smeru normale? Jačina zračenja sa elementarnog dela se menja po *Lambert*-ovom zakonu.

**Rešenje:**

Snaga kojom se sa jedinične površine elementarne površi  $dS$  energija zrači kroz elementarni prostorni ugao  $d\omega$ , pod kojim se vidi elementarna površ  $dS'$  na površi polusfere (kao što je pokazano na slici 18.1), iznosi

$$dq_s = I_{l,s} d\omega. \quad (18.1)$$



Slika 18.1

Prostorni ugao  $d\omega$  pod kojim se sa elementarne površi  $dS$  (iz tačke) vidi elementarna površ  $dS'$  je određen izrazom  $d\omega = \sin \alpha d\psi d\alpha$ , što je objašnjeno u prethodnom zadatku. Uglovi  $\alpha$  i  $\psi$  su uglovi u sfernom koordinatnom sistemu, čiji je koordinatni početak postavljen u "tačkastu" površ  $dS$ .

Veza površinske gustine snage koja se zrači u poluprostor sa površi  $dS$  i jačine zračenja sa elementarnog dela po jedinici njegove površine u smeru normale, dobija se integracijom svih elementarnih snaga zračenja drugog reda koje se zrače u elementarne prostorne uglove  $d\omega$  pod kojima se vide elementarne površi polusfere, kojima odgovaraju granice  $\psi_1 = 0$  do  $\psi_2 = 2\pi$  i  $\alpha_1 = 0$  do  $\alpha_2 = \pi/2$ :

$$q_s = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} I_{l,s} \sin \alpha d\psi d\alpha \quad (18.2)$$

$$q_s = \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} I_{n,s} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha \quad (18.3)$$

$$q_s = 2\pi \frac{1}{2} I_{n,s} \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos \pi) = \pi I_{n,s} \quad (18.4)$$

Sa površi crnog tela temperature  $T$  energija se zračenjem, prema *Stefan-Boltzmanovom* zakonu (II.4), odvodi površinskom gustinom snage

$$q_s = C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad (18.5)$$

Iz prethodne dve jednačine se dobija jačina zračenja sa elementarne površi crnog tela (temperature  $T$ ) po jedinici površine elementarnog dela u smeru normale:

$$I_{n,s} = \frac{1}{\pi} q_s = \frac{1}{\pi} C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad (18.6)$$

**24.** Posmatrajmo disk prečnika  $D$  (površine  $S_j$ ) i ravnu površ površine  $S_i$  koja je mnogo manja od površine diska ( $S_j$ ). Disk i ravna površ su paralelni. Ravna površ male površine se nalazi na rastojanju  $L$  od centra površi diska, locirana oko normale koja prolazi kroz centar diska. Odrediti "faktor vidjenja" površi  $S_j$  sa površi  $S_i$  ( $F_{i \rightarrow j}$ ).

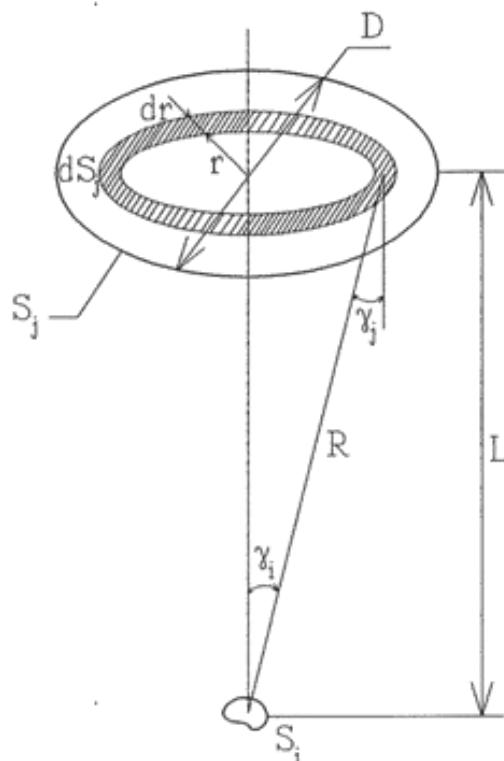
**Rešenje:**

S obzirom da se površ površine  $S_i$  može smatrati "tačkastim" izvorom zračenja (značenje ovog pojma je objašnjeno u zadatku 17 - uglovi  $\gamma_i$ ,  $\gamma_j$  i rastojanje  $R$  sa slike 1 su približno konstantni za sve tačke površi  $S_j$ ) kada se posmatra energija koja se zrači do površi diska, izraz za "faktor vidjenja" (17) se svodi na

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_j, \quad (24.1)$$

odnosno, s obzirom da je  $\gamma_i = \gamma_j \equiv \gamma$  (slika 24.1),

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos^2 \gamma}{\pi R^2} dS_j. \quad (24.2)$$



Slika 24.1

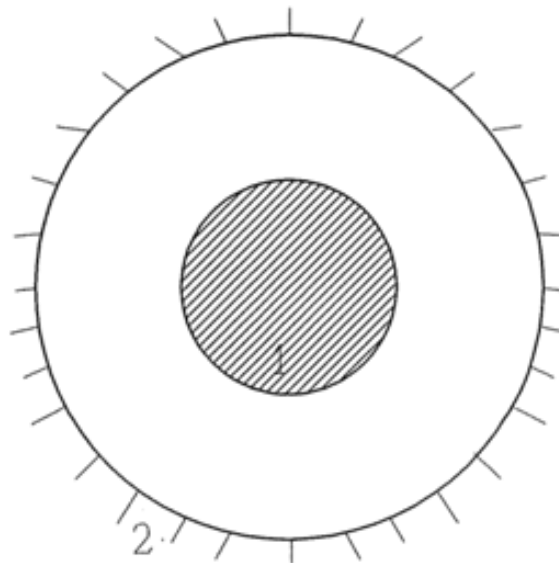
Integracija po površi  $S_j$  se može izvršiti podelom diska na koncentrične prstenove poluprečnika  $r$  i širine  $dr$ , za koje su  $\gamma$  i  $R$  konstantni, slika 24.1 ( $dS_j = 2 \pi r dr$ ,  $R^2 = r^2 + L^2$ ,  $\cos \gamma = L / R$ ), na način

$$F_{i \rightarrow j} = 2 L^2 \int_0^{D/2} \frac{r dr}{(r^2 + L^2)^2} = \frac{D^2}{4 L^2 + D^2}. \quad (24.3)$$

Dakle, do površi diska se prenosi deo ukupne snage zračenja sa površi malog tela koji je jednak

$$\frac{D^2}{4 L^2 + D^2}. \quad (24.4)$$

**25.** Na slici 25.1 je prikazan zatvoren prostor formiran između dva tela sfernih površi prikazanih površina  $S_1$  i  $S_2$ . Odrediti sve "faktore vidjenja"  $F_{ij}$  ( $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ ).



Slika 25.1

**Rešenje:**

S obzirom da zatvoren prostor ograničavaju dve površi ( $N = 2$ ), potrebno je direktno odrediti samo jedan "faktor vidjenja" (u skladu sa izrazom (20)).

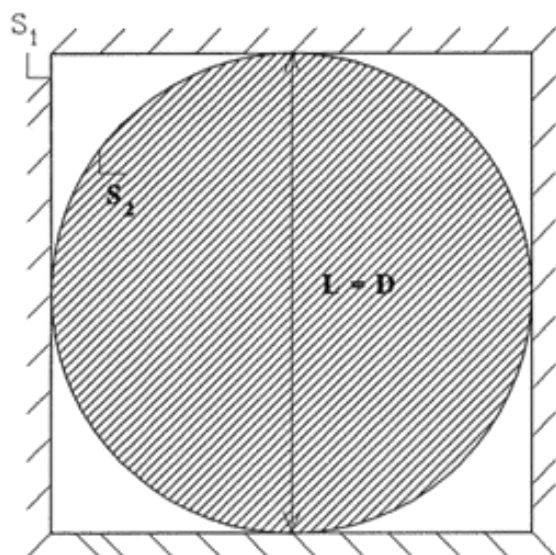
S obzirom da celokupno zračenje sa tela 1 stiže do tela 2, jednostavno se zaključuje da je  $F_{12} = 1$ . Po navedenim pravilima (18) i (19) se određuju ostali "faktori vidjenja":

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= 1 - F_{12} = 0 \\
 F_{21} &= \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{S_1}{S_2} \\
 F_{22} &= 1 - F_{21} = 1 - \frac{S_1}{S_2}
 \end{aligned}
 \tag{25.1}$$

Do istih rezultata je moglo da se dodje polazeći od vrednosti  $F_{11} = 1$ , s obzirom na konveksnost površi 1, uz primenu navedenih pravila.

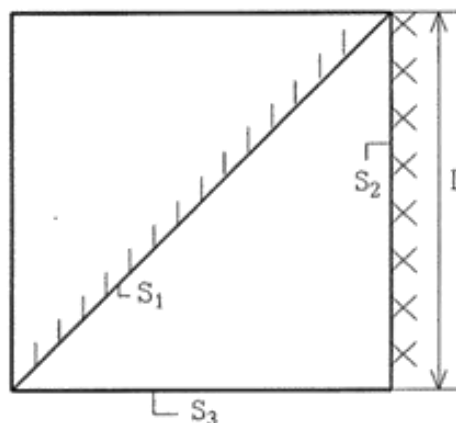
26. Odrediti "faktore vidjenja" površi  $S_2$  sa površi  $S_1$  ( $F_{12}$ ) i površi  $S_1$  sa površi  $S_2$  ( $F_{21}$ ) za sledeće geometrije:

a) sfera prečnika  $D$  unutar kocke stranice  $L$ , koja je jednaka prečniku  $D$



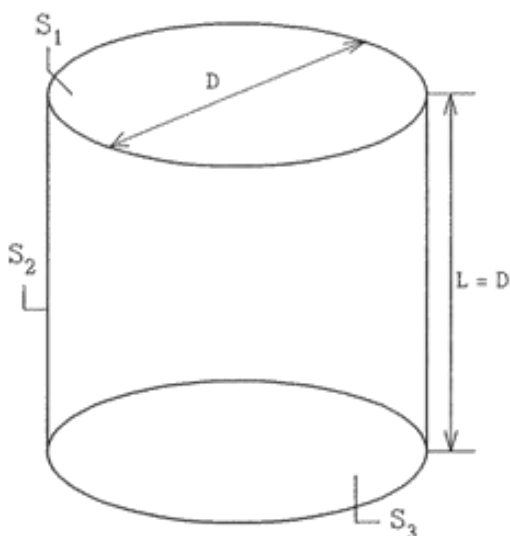
Slika 26.1

b) površ dijagonalnog preseka i jedna površ kanala kvadratnog poprečnog preseka stranice  $L$



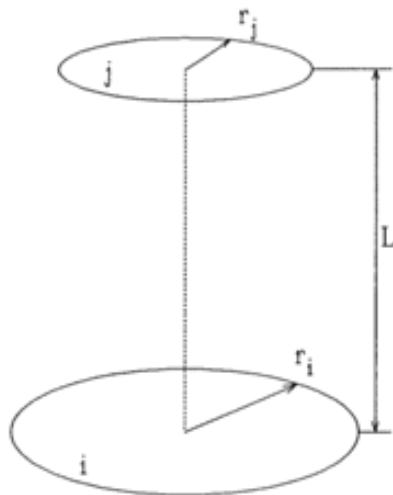
Slika 26.2

v) bazis i omotač cilindrične cevi prečnika  $D$  i dužine  $L$ , koja je jednaka prečniku  $D$



Slika 26.3

U literaturi [3] su izloženi postupci za određivanje "faktora vidjenja" između pojedinih površi. Postupci se baziraju na formulama ili grafičkim zavisnostima kako bi se izbeglo rešavanje složenih integrala pri rešavanju praktičnih problema. Jedna od formula koje se obično daju u literaturi [3] je za "faktor vidjenja" između koaksijalnih paralelnih diskova različitih prečnika (slika 26.4). Postupak za proračun je sledeći:



$$\begin{aligned}
 R_i &= \frac{r_i}{L} \\
 R_j &= \frac{r_j}{L} \\
 s &= 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2} \\
 F_{ij} &= \frac{1}{2} \left( s - \sqrt{s^2 - 4 \left( \frac{r_j}{r_i} \right)^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{26.1}$$

Slika 26.4

**Rešenje:**

a) S obzirom da celokupna snaga zračenja sa površi 1 dolazi do površi 2, ima se

$$F_{12} = 1. \tag{26.2}$$

Primenom pravila (18), dolazi se do druge tražene vrednosti

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{\pi D^2}{6 L^2} 1 = \frac{\pi}{6}. \tag{26.3}$$

b) Primenom pravila (19) na površ  $S_1$ , može se napisati

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1. \tag{26.4}$$

S obzirom da je površ 1 ravna, "sopstveni faktor vidjenja" ima vrednost nula:

$$F_{11} = 0 \tag{26.5}$$

Treća jednačina za određivanje "faktora vidjenja"  $F_{1j}$  se može postaviti na osnovu simetričnosti geometrije:

$$F_{12} = F_{13} \tag{26.6}$$

Jednostavnim rešavanjem prethodnih jednačina, dobija se vrednost

$$F_{12} = \frac{1}{2}, \quad (26.7)$$

a primenom pravila (18) i vrednost

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{\sqrt{2}L}{L} 0,5 = 0,71. \quad (26.8)$$

v) Primenom postupka za određivanje "faktora vidjenja" između koaksijalnih paralelnih diskova različitih prečnika, izloženog u tekstu zadatka, za faktora  $F_{13}$  se dobija:

$$R_1 = R_3 = R = \frac{D}{2} = 0,5$$

$$s = 1 + \frac{1 + R^2}{R^2} = 1 + \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 6 \quad (26.9)$$

$$F_{13} = \frac{1}{2} (6 - \sqrt{36 - 4}) \approx 0,17$$

Faktor  $F_{12}$  se određuje prema izrazu (19), primenjenom na površ 1:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1, \quad (26.10)$$

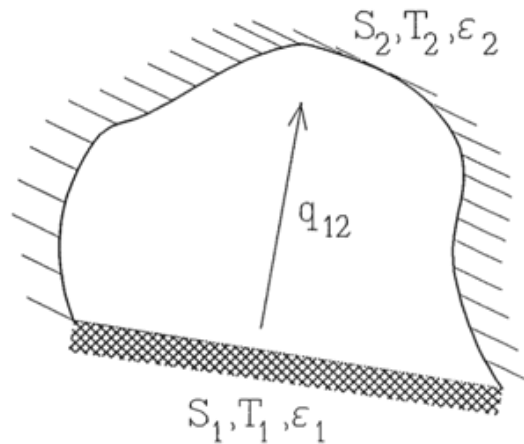
gde su:  $F_{11} = 0$  i  $F_{13} = 0,17$ . Dakle, dobija se vrednost  $F_{12} = 0,83$ .

Primenom pravila (18) se dobija

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{\pi D^2}{4 \pi D L} 0,83 \approx 0,21. \quad (26.11)$$



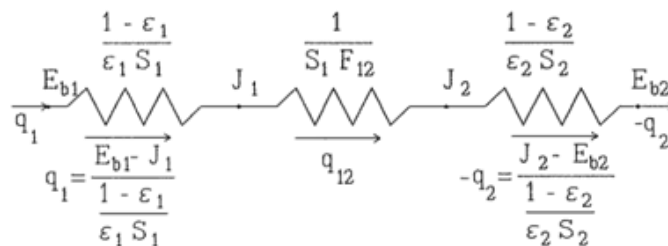
27. Postaviti radijacionu šemu koja odgovara razmeni energije izmedju dve izotermičke površi koje ograničavaju zatvoren prostor; primer je prikazan na slici 27.1. Obe površi poseduju difuziona svojstva.



Slika 27.1

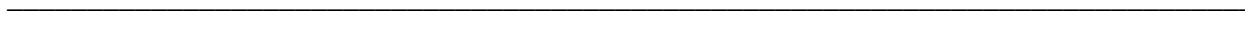
**Rešenje:**

Primenom izloženih principa, za najjednostavniji slučaj razmene energije izmedju dve sive izotermičke površi koje ograničavaju zatvoren prostor se može formirati radijaciona šema prikazana na slici 27.2.



Slika 27.2

Primenom radijacione šeme sa slike 27.2, jednostavno se mogu rešiti zadaci 15 i 16, odnosno dobiti izrazi (15.9) i (16.8).

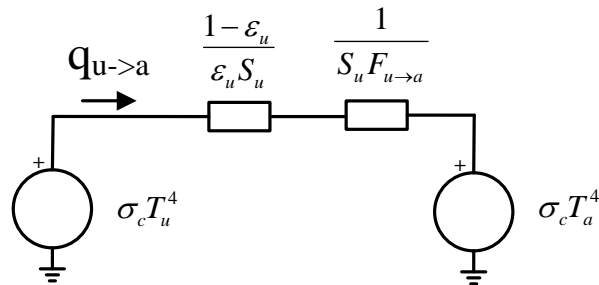


## ЗАДАТАК 2

Цев пречника  $D_u = 5$  cm, емисивности  $\varepsilon_u = 0.8$  и температуре  $\vartheta_u = 800^\circ\text{C}$  се налази у слободном простору температуре  $20^\circ\text{C}$ . За колико се смањи снага преноса топлоте зрачењем од цеви ако се она постави у цев (екран) чији је пречник унутрашње површи  $D_{su} = 7$  cm, њена емисивност  $\varepsilon_{su} = 0.2$ , док је пречник спољашње површи екранске цеви  $D_{ss} = 8$  cm, а емисивности  $\varepsilon_{ss} = 0.8$ ? Сматрати да је отпор преносу топлоте кроз цев занемарљиво мали.

### Решење

У случају да екран није постављен, спољашња површ цеви и амбијент образују затворен простор.. Размена енергије зрачењем између површи које образују затворен простор може се анализирати на основу следеће радијационе шеме (слика).



За практичну употребу радијационих шема потребно је познавати факторе виђења између одговарајућих површи. У овом случају није потребно решавати површинске интеграле да би се одредили фактори виђења.

Пошто сва енергија емитована са површи цеви доспева у амбијент, на основу дефиниције фактора виђења се закључује следеће:

$$F_{u \rightarrow a} = \frac{Q_{u \rightarrow a}}{Q_{uk}} = 1 \quad (2.1)$$

где је  $Q_{u \rightarrow a}$  енергија која, емитована са површи цеви, стиже у амбијент, а  $Q_{uk}$  је укупна енергија емитована са површи цеви. Израз (2.1) би важио и када би се енергије замениле одговарајућим снагама.

$$F_{u \rightarrow u} + F_{u \rightarrow a} = 1 \Rightarrow F_{u \rightarrow u} = 1 - F_{u \rightarrow a} = 0 \quad (2.2)$$

Енергија емитована у амбијенту само делом стиже на површ цеви, док остатак енергије завршава у амбијенту. Због тога је фактор виђења  $F_{a \rightarrow u} < 1$ .

$$F_{a \rightarrow u} \cdot S_a = F_{u \rightarrow a} \cdot S_u \Rightarrow F_{a \rightarrow u} = F_{u \rightarrow a} \cdot \frac{S_u}{S_a} = \frac{S_u}{S_a} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

јер  $S_a \rightarrow \infty$ .

Укупна енергија која се размењује између спољашње површи цеви и амбијента износи:

$$q_{u \rightarrow a} = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_a^4)}{\frac{1 - \varepsilon_u}{S_u \varepsilon_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow a}}} = \varepsilon_u S_u \sigma_c (T_u^4 - T_a^4) \quad (2.4)$$

Након постављања екрана, енергија се зрачењем преноси између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана и између спољашње површи екрана и амбијента. Снага која

се размењује између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана по јединици дужине износи:

$$q_{u \rightarrow su} = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_s^4)}{\frac{1 - \varepsilon_u}{\varepsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{su} S_{su}}} \quad (2.5)$$

где је  $T_s$  температура екрана, а  $F_{u \rightarrow su}$  фактор виђења између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана. Пошто сва енергија емитована са спољашње површи цеви доспева на унутрашњу површ екрана, закључује се да је  $F_{u \rightarrow su} = 1$ .

Екран је танак и отпор преносу топлоте између унутрашње и спољашње површи екрана је занемарљиво мали. Због тога се може сматрати да су температуре спољне и унутрашње површи приближно једнаке.

Снага која се размењује између спољашње површи екрана и амбијента по јединици дужине износи:

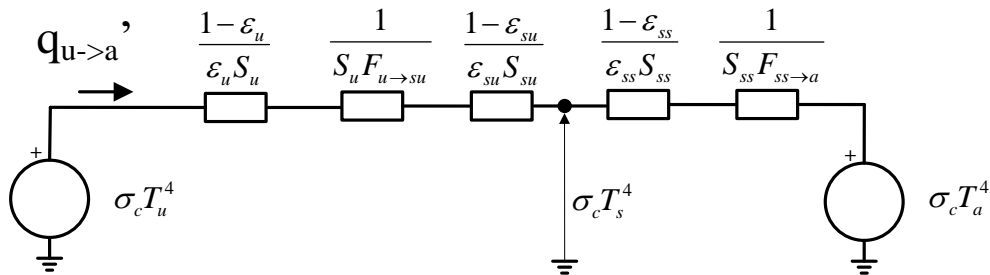
$$q_{ss \rightarrow a} = \frac{\sigma_c (T_s^4 - T_a^4)}{\frac{1 - \varepsilon_{ss}}{\varepsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \quad (2.6)$$

Пошто нема генерисања топлотне енергије у екрану, закључује се да је:

$$q_{u \rightarrow su} = q_{ss \rightarrow a} = q_{u \rightarrow a} \quad (2.7)$$

Из (2.5), (2.6) и (2.7) следи снага која се зрачењем размењује између цеви и амбијента:

$$q_{u \rightarrow a} = \frac{1}{\frac{1 - \varepsilon_u}{\varepsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{su} S_{su}} + \frac{1 - \varepsilon_{ss}}{\varepsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \sigma_c (T_u^4 - T_a^4) \quad (2.8)$$



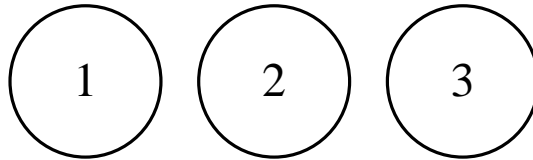
Однос поменутих снага износи:

$$\begin{aligned} \frac{q_{u \rightarrow a}}{q_{u \rightarrow a}} &= \frac{\varepsilon_u S_u \sigma_c (T_u^4 - T_a^4)}{1} \cdot \frac{1}{\frac{1 - \varepsilon_u}{\varepsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{su} S_{su}} + \frac{1 - \varepsilon_{ss}}{\varepsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \sigma_c (T_u^4 - T_a^4)} \\ &= \frac{\varepsilon_u S_u}{1} = 3.91 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
F_{u \rightarrow su} &= 1; \\
F_{ss \rightarrow a} &= 1; \\
S_u &= D_u \pi L; \\
S_{su} &= D_{su} \pi L; \\
S_{ss} &= D_{ss} \pi L;
\end{aligned}$$

### ЗАДАТАК 3

Уколико се све три фазе сувог електроенергетског трансформатора који се хлади ваздухом и који се налази у просторији температуре  $20^\circ\text{C}$  направе на исти начин, средња фаза је нешто топлија од крајњих фаза. Разлог томе је мања снага која се зрачењем одводи са спољашњих површи високонапонских (спољних) намотаја средишње фазе. Написати математички исказ хлађења средишње и крајњих фаза из којих се то види, користећи теорију размене топлоте зрачењем (преко фактора виђења).



#### *Решење*

Спољашње површи фаза 1, 2 и 3 и амбијент образују затворен простор, те се пренос топлоте зрачењем може анализирати на основу фактора виђења и одговарајућих шема зрачења.

Означимо са  $F_{12}$  фактор виђења између фаза 1 и 2. Због симетрије се закључује да су фактор виђења између фаза 1 и 2 и фактор виђења између фаза 3 и 2 једнаки.

$$F_{32} = F_{12} \quad (3.1)$$

Такође се из геометрије проблема закључује да је фактор виђења између фаза 1 и 3 једнак нули:

$$F_{13} = 0 \quad (3.2)$$

Означимо са  $q_{12}$  снагу која се зрачењем размењује између фаза 1 и 2. На основу енергетског биланса, примењеног на фазу 1, следи:

$$q_1 = q_{12} + q_{1a} \quad (3.3)$$

где је  $q_1$  укупна снага зрачења са површи фаза 1. Дељењем једначине (3.3) са  $q_1$  се добија:

$$1 = \frac{q_{12}}{q_1} + \frac{q_{1a}}{q_1} \quad (3.4)$$

На основу дефиниције фактора виђења, једначина (3.4) се може написати у следећем облику:

$$1 = F_{12} + F_{1a} \quad (3.5)$$

Из једначине (3.5) и симетрије фаза 1 и 3 следи да фактори виђења између фаза 1 и амбијента, односно фаза 3 и амбијента износе:

$$F_{1a} = F_{3a} = 1 - F_{12} \quad (3.6)$$

На основу енергетског биланса, примењеног на фазу 2, следи:

$$q_2 = q_{21} + q_{23} + q_{2a} \quad (3.7)$$

где је  $q_2$  укупна снага зрачења са површи фазе 2. Дељењем једначине (3.7) са  $q_2$  се добија:

$$1 = \frac{q_{21}}{q_2} + \frac{q_{23}}{q_2} + \frac{q_{2a}}{q_2} \quad (3.8)$$

На основу дефиниције фактора виђења, једначина (3.8) се може написати у следећем облику:

$$1 = F_{21} + F_{23} + F_{2a} \quad (3.9)$$

За факторе виђења важе следеће релације:

$$F_{21} \cdot S_2 = F_{12} \cdot S_1 \quad (3.10)$$

$$F_{23} \cdot S_2 = F_{32} \cdot S_3 \quad (3.11)$$

Пошто важи да је  $S_1 = S_2 = S_3 = S$ , следи да су одговарајући фактори виђења једнаки.

$$F_{21} = F_{12} \quad (3.12)$$

$$F_{23} = F_{32} \quad (3.13)$$

На основу (3.1), (3.9), (3.12) и (3.13) следи да фактор виђења између фазе 2 и амбијента износи:

$$F_{2a} = 1 - 2 \cdot F_{12} \quad (3.14)$$

Ако претпоставимо да су температуре све три фазе приближно исте и једнаке ( $T$ ), до хлађења долази само између спољних површи намотаја и амбијента.

$$q_{1a} = q_{3a} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{F_{1a}S}\right)} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-F_{12})S}\right)} \quad (3.15)$$

$$q_{2a} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-2F_{12})S}\right)} \quad (3.16)$$

$$\frac{q_{1a}}{q_{2a}} = \frac{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-F_{12})S}\right)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-2F_{12})S}\right)} \quad (3.17)$$

Закључак: при истој температури све три фазе, већа је снага којом се топлота преноси ка околини зрачењем са крајњих фаза него са средње фазе.

#### **ЗАДАТАК 4**

Написати двоструки интеграл по  $y$  и  $z$  координатама на кругу ( $k$ ) чијим се решавањем долази до вредности фактора виђења круга полупречника  $R = 1\text{m}$  са мале хоризонталне површи ( $mp$ ) која се налази у координатном почетку правоугаоног координатног система. Круг се налази у  $yz$ -равни на  $x = 1\text{m}$ , са координатом центра круга:  $[1,0,1]$ . Једначина кружнице у равни (центар на координати  $p, q$ ):  $(y - p)^2 + (z - q)^2 = R^2$ .



$$\cos \gamma_2 = \frac{(-1) \cdot (-1)}{1 \cdot \sqrt{1 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma_1 = \cos \gamma_2 = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}}$$

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2}$$

$$r = \sqrt{l^2 + z^2} = \sqrt{1 + y^2 + z^2}$$

Фактор виђења из дефиниционе формуле

$$F_{12} = \int_{S_1} \frac{\cos^2(\gamma)}{r^2 \pi} dS_1$$

Како би се интеграло по кружници, неопходно је да се границе унутрашњег интеграла (по координати  $z$ ) изразе помоћу једначине круга

$$F_{12} = \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(z-1)^2}}^{\sqrt{1-(z-1)^2}} \frac{1}{(1 + y^2 + z^2)^2 \pi} dy dz$$

или границе унутрашњег интеграла (по координати  $y$ )

$$F_{12} = \int_{-1}^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{(1 + y^2 + z^2)^2 \pi} dy dz$$

Решавањем интеграла у Mathcad-у добија се:

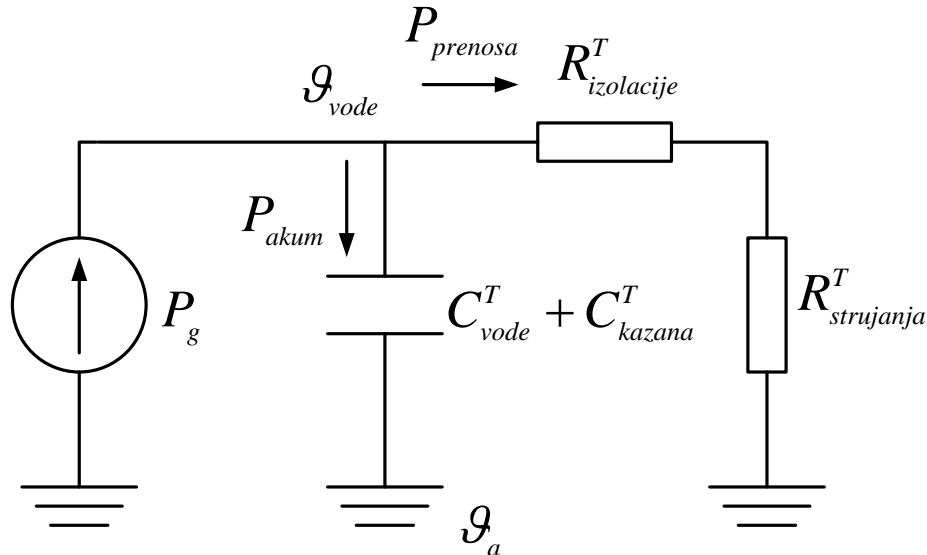
$$F_{12} = 0.276$$

## **ЗАДАТАК 5**

У бојлеру запремине 50l налази се вода на температури амбијента  $\vartheta_a = 20^\circ\text{C}$ . Бојлер поседује “on-off” (хистерезисни) регулатор који искључује грејач када температура воде пређе подешену вредност за 5К, а укључује грејач када температура воде падне испод подешене вредности за 5К. Израчунати утрошену електричну енергију (у kWh) у периоду од 24h ако је подешена температура у бојлеру  $90^\circ\text{C}$ . Сматрати да се у бојлеру током посматраних 24h не размењује вода. Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача  $P_{gr} = 2\text{kW}$ , маса казана  $m_k = 9.5\text{kg}$ , површина казана (унутрашња површина топлотне изолације)  $S_u = 0.8\text{m}^2$ , дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности  $\lambda = 0.1\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ,  $\delta = 30\text{mm}$ , спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације)  $S_s = 1\text{m}^2$ . Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи  $\alpha_s = 5\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ , а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан  $\alpha_u \gg \alpha_s$ . Густина воде износи  $\rho_v = 1000\text{kg}/\text{m}^3$ , специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200\text{J}/(\text{kgK})$  и специфични топлотни капацитет казана  $c_{pk} = 474\text{J}/(\text{kgK})$ . Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана израчунавати по формула за раван зид површине  $(S_u + S_s) / 2$ .

### Решење

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења: занемарен је отпор преношењу топлоте кроз воду и зид казана, као и топлотни капацитет изолације. Сматра се да маса воде и зид бојлера представљају изотермичку запремину. Пошто се вода у бојлеру на почетку посматраног интервала (дужине 24h) налази на температури амбијента, хистерезисни регулатор укључује грејач. Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на слици.



Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214.5 \text{kJ/kg} \quad (5.1)$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околина износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{(S_s + S_u)/2} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0.5333 \text{K/W} \quad (5.2)$$

Укупна снага којом грејач генерише топлотну енергију представља збир снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (5.3)$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (5.4)$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \quad (5.5)$$

Са  $\theta$  је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент.

Треба напоменути да ова анализа и њени резултати важе само под условом да нема протока воде кроз бојлер. У супротном би се јавиле додатне компоненте снаге којом се енергија размењује са амбијентом, јер би посматрани систем представљао отворени систем са протоком флуида. У том случају би и варијације температуре воде по запремини бојлера биле веће, па би се поставило питање оправданости претпоставке да унутрашњост бојлера представља изотермичку запремину.



Заменом израза (5.4) и (5.5) у једначину (5.3) се добија диференцијална једначина која описује промену пораста температуре воде и казана у односу на амбијент.

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (5.6)$$

Даљим сређивањем се добија једначина у следећој форми:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (5.7)$$

$$R^T \cdot P_g = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (5.8)$$

где је са  $\tau$  означена временска константа система.

Њено решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (5.9)$$

где је са  $\theta_0$  означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са  $\theta_\infty$  пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго, што овде није случај).

У стационарном стању нема промене температуре, те је извод температуре (па и пораста температуре) једнак нули:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (5.10)$$

те се заменом у једначину (5.8) добија:

$$\theta_\infty = P_g \cdot R^T \quad (5.11)$$

У тренутку  $t^*$  пораст температуре достиже вредност  $\theta^*$  (који у овом случају одговара температури воде од 95°C). Време  $t^*$  се израчунава из једначине (5.9) примењене за тренутак  $t^*$ :

$$\theta^* = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) \quad (5.12)$$

$$(\theta_0 - \theta_\infty) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \theta^* - \theta_\infty \quad (5.13)$$

$$e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (5.14)$$

$$-\frac{t^*}{\tau} = \ln \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (5.15)$$

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta^* - \theta_\infty} \quad (5.16)$$

Израз (5.16) је општи и важи како за загревање, тако и за хлађење и у даљем тексту ће бити искључиво коришћен.

За конкретан случај, време загревања воде од 20°C до 95°C износи:

$$t_{zagr1} = 0.5333 \cdot 214.503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{0 - 0.5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0.5333 \cdot 2000} = 2.3168h \quad (5.17)$$

Након што температура воде достигне  $95^{\circ}\text{C}$ , регулатор искључује грејач и вода у бојлеру почиње да се хлади.

За време хлађења од  $95^{\circ}\text{C}$  до  $85^{\circ}\text{C}$  се добија:

$$t_{\text{hladjenja}} = 0.5333 \cdot 214.503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(95-20) - 0.5333 \cdot 0}{(85-20) - 0.5333 \cdot 0} = 4.547\text{h} \quad (5.18)$$

Након што температура воде падне на  $85^{\circ}\text{C}$ , регулатор поново укључује грејач и температура воде у бојлеру почиње да расте. Време загревања воде од  $85^{\circ}\text{C}$  до  $95^{\circ}\text{C}$  износи:

$$t_{\text{zagrevanja}} = 0.5333 \cdot 214.503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(85-20) - 0.5333 \cdot 2000}{(95-20) - 0.5333 \cdot 2000} = 0.3188\text{h} \quad (5.19)$$

Анализира се период од 24h. На почетку тог периода, вода се загрева од  $20^{\circ}\text{C}$  до  $95^{\circ}\text{C}$ . Након тога се одиграва више циклуса хлађења од  $95^{\circ}\text{C}$  до  $85^{\circ}\text{C}$  и загревања од  $85^{\circ}\text{C}$  до  $95^{\circ}\text{C}$ . Један такав циклус траје:

$$t_{\text{ciklusa}} = t_{\text{zagrevanja}} + t_{\text{hladjenja}} = 4.8658\text{h} \quad (5.20)$$

Укупан број таквих циклуса у току дана је:

$$n = \frac{24\text{h} - 2.3168\text{h}}{4.8658\text{h}} = 4.45 \quad (5.21)$$

Пети циклус започиње хлађењем воде. Оно не стигне да се заврши у току посматраног дана јер је:

$$24\text{h} - 2.3168\text{h} - 4 \cdot 4.8658\text{h} = 2.22\text{h} < 4.547\text{h} \quad (5.22)$$

Закључак је да се загревање воде од  $85^{\circ}\text{C}$  до  $95^{\circ}\text{C}$  обави четири пута у току дана. Укупна утрошена електрична енергија у току једног дана износи:

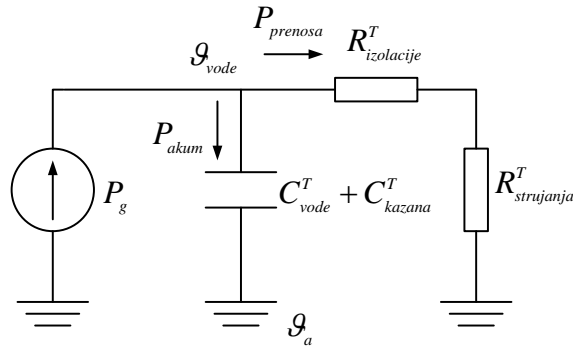
$$\begin{aligned} W_{el} &= P_g \cdot (t_{\text{zagr1}} + 4 \cdot t_{\text{zagrevanja}}) = 2\text{kW} \cdot (2.3168\text{h} + 4 \cdot 0.3188\text{h}) = \\ &= 4.6336\text{kWh} + 2.5504\text{kWh} = 7.184\text{kWh} \end{aligned} \quad (5.23)$$

## **ЗАДАТАК 6**

Вода у бојлеру запремине 80 литара са грејачем снаге 2 kW се загреје са  $20^{\circ}\text{C}$  на  $75^{\circ}\text{C}$  за 175 минута. Посматрати следећу ситуацију: вода се загреје на  $75^{\circ}\text{C}$ , после чега се грејач искључи и остаје трајно искључен. У истом тренутку из бојлера се источи 10 литара мешевине топле и хладне воде (температура хладне воде износи  $20^{\circ}\text{C}$ ), температуре  $55^{\circ}\text{C}$ . После тога нема даље потрошње воде. После ког времена ће температура воде у бојлеру да опадне на  $50^{\circ}\text{C}$ ? Сматрати да је температура амбијента  $20^{\circ}\text{C}$  и да је снага преноса топлоте од воде ка амбијенту сразмерна разлици температуре воде и амбијента. Густина воде износи  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ , специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ , специфични топлотни капацитет металног казана  $c_{pk} = 474 \text{ J/(kg K)}$ , а његова тежина  $c_{pk} = 20 \text{ kg}$ . Топлотни капацитет изолације се може занемарити.

### Решење

Топлотна шема која описује наведени проблем:



Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 345.48 \text{ kJ/K} \quad (6.1)$$

Промена пораста температуре воде у бојлеру у односу на амбијент описана је следећом диференцијалном једначином:

$$C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} = P_g \quad (6.2)$$

Сређивање једначине се добија:

$$R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R^T \cdot P_g \quad (6.3)$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \quad (6.4)$$

где је са  $\tau$  означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T \cdot C^T \quad (6.5)$$

Решење диференцијалне једначине гласи:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (6.6)$$

$\theta_0$  - пораст температуре воде у тренутку  $t=0$

$\theta_{stac}$  - пораст температуре воде у устаљеном стању које би наступило када би загревање трајало неограничено дуго.

У посматраном случају загревања воде са  $20^\circ\text{C}$  на  $75^\circ\text{C}$ , величине које фигуришу у претходном изразу износе:

$$\theta_0 = 0\text{K} \quad (6.7)$$

$$\theta_{stac} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \quad (6.8)$$

Заменом претходне две вредности у израз за промену температуре и посматрањем тренутка у коме вода достиже температуру  $75^\circ\text{C}$  (тренутак у коме се грејач искључује – 175 минута након почетка загревања), може се одредити временска константа загревања, а потом из ње и топлотни отпор према амбијенту.

$$\theta(t^*) = \theta^* = 55\text{K} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) \quad (6.9)$$

Претходна једначина је трансцедентна по  $\tau$  и може се решити итеративним поступком:

$$\tau_{k+1} = \frac{C^T \cdot \theta^*}{P_g \cdot (1 - \exp(-\frac{t^*}{\tau_k}))} \quad (6.10)$$

Узимањем почетног погађања  $\tau=3\text{h}$ , након довољног броја итерација добија се приближна вредност временске константе:

$$\tau = 14.333\text{h} \quad (6.11)$$

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешевине топле и хладне воде температуре  $55^\circ\text{C}$ :

Енергија коју треба довести (позитиван број) / одвести (негативан број) телу чији топлотни капацитет износи  $C^T$  да би јој се температура променила са  $\mathcal{G}_p$  на  $\mathcal{G}$ :

$$Q = C^T \cdot (\mathcal{G} - \mathcal{G}_p) \quad (6.12)$$

За воду запремине  $V$ , топлотни капацитет износи

$$C^T = \rho \cdot V \cdot c_p \quad (6.13)$$

(у приближним прорачунима се може сматрати да се  $\rho$  и  $c_p$  не мењају са температуром)

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешевине топле и хладне воде температуре  $55^\circ\text{C}$ :

$$345.48 \text{ kJ/K} \cdot (75 - \mathcal{G}_x) = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4200 \text{ kJ/(kg K)} \cdot (55 - 20) \quad (6.14)$$

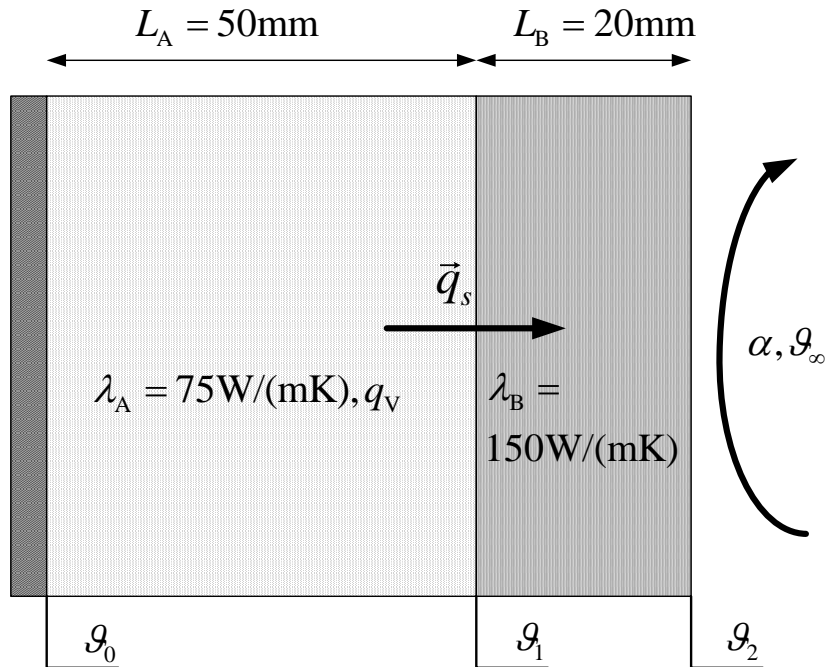
$$\mathcal{G}_x = 75 - (10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4200 \text{ kJ/(kg K)} \cdot (55 - 20)) / 345.48 \text{ kJ/K} = 70.74^\circ\text{C} \quad (6.15)$$

Време хлађења воде са  $70.74^\circ\text{C}$  на  $50^\circ\text{C}$  одређује се помоћу следећег израза (изведен у задатку 5 са рач. вежби):

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_{stac}}{\theta^* - \theta_{stac}} = 14.333\text{h} \cdot \ln \frac{70.74 - 0}{50 - 0} = 7.53\text{h} \quad (6.16)$$

## **ЗАДАТАК 7**

Раван зид се састоји из два слоја, израђена од различитих материјала А и В. У слоју А се равномерно по запремини генерише топлота запреминском густином снаге  $q_v = 1.5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$ . Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици 1. Гранична површ слоја А је добро топлотно изолована, а гранична површ слоја В се хлади водом температуре  $\mathcal{G}_\infty = 30^\circ\text{C}$ , уз коефицијент преласка топлоте струјањем  $\alpha = 1000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ . Скицирати расподелу температуре дуж  $x$  осе у стационарном стању. Одредити температуру граничне изоловане површи слоја А ( $\mathcal{G}_0$ ) и температуру граничне хлађене површи слоја В ( $\mathcal{G}_2$ ).



*Решење*

За сваки од слојева се може поставити и решити општа једначина температурног поља.

За слој А она гласи:

$$\lambda_A \cdot \Delta \vartheta + q_v = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (7.1)$$

где је са  $\Delta$  означен Laplace-ов оператор који у Descartes-овом координатном систему има следећи облик

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.2)$$

У стационарном стању се расподела температуре не мења у времену, те важи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \quad (7.3)$$

Општа једначина температурног поља за слој А у стационарном стању гласи:

$$\lambda_A \cdot \Delta \vartheta + q_V = 0 \quad (7.4)$$

$$\lambda_A \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + q_V = 0 \quad (7.5)$$

Пошто се посматра једнодимензиони пренос топлоте важи:

$$\vartheta = \vartheta(x) = \text{const}(y, z) \quad (7.6)$$

што повлачи за собом:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \quad (7.8)$$

Заменом у (7.5) се добија:

$$\lambda_A \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + q_V = 0 \quad (7.9)$$

Њено опште решење је:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (7.10)$$

где су  $C_1$  и  $C_2$  произвољне константе.

За слој В општа једначина температурног поља гласи:

$$\lambda_B \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0 \quad (7.11)$$

чије опште решење је:

$$\vartheta(x) = C_3 \cdot x + C_4 \quad (7.12)$$

где су  $C_3$  и  $C_4$  произвољне константе.

Четири константе се могу одредити из граничних услова који се постављају на површима дисконтинуитета материјалне средине:

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0_+) = 0 \quad (7.13)$$

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_{A-}) = -\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_{A+}) \quad (7.14)$$

$$\vartheta(L_{A-}) = \vartheta(L_{A+}) \quad (7.15)$$

$$-\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_A + L_B) = \alpha \cdot (\vartheta(L_A + L_B) - \vartheta_\infty) \quad (7.16)$$

Из услова (7.13) се добија:

$$-\frac{q_V \cdot 0}{\lambda_A} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (7.17)$$

Из услова (7.15) се добија:

$$-\frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_2 = C_3 \cdot L_A + C_4 \quad (7.18)$$

Из услова (7.14) се добија:

$$-\lambda_A \cdot \left( -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_A} \right) = -\lambda_B \cdot C_3 \Rightarrow C_3 = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \quad (7.19)$$

Из услова (7.16) се добија:

$$-\lambda_B \cdot C_3 = \alpha \cdot (C_3 \cdot (L_A + L_B) + C_4 - \vartheta_\infty) \quad (7.20)$$

$$-\lambda_B \cdot \left( -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \right) = \alpha \cdot \left( -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot (L_A + L_B) + C_4 - \vartheta_\infty \right) \quad (7.21)$$

$$q_V \cdot L_A = -\frac{q_V \cdot \alpha \cdot L_A^2}{\lambda_B} - \frac{q_V \cdot \alpha \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \alpha \cdot C_4 - \alpha \cdot \vartheta_\infty \quad (7.22)$$

$$C_4 = \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (7.23)$$

На основу једначина (7.12), (7.19) и (7.23) може се добити расподела температуре у слоју В

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot x + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (7.24)$$

Заменом у (7.24) се добија температура граничне хлађене површи слоја В:

$$\vartheta_2 = \vartheta(L_A + L_B) = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot (L_A + L_B) + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (7.25)$$

$$\vartheta_2 = \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^\circ \text{C} \quad (7.26)$$

Заменом (7.19) и (7.23) у (7.18) се добија:

$$C_2 = \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (7.27)$$

Расподела температуре у слоју А се добија заменом израза (7.17) и (7.27) у (7.10):

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (7.28)$$

из чега се израчунава тражена температура изоловане површи:

$$\vartheta_0 = \vartheta(0) = \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty = 140^\circ \text{C} \quad (7.29)$$

Могућ је и препоручљив други приступ решавању овог задатка:

Укупна генерисана снага у слоју А се може израчунати на следећи начин:

$$q_A = \iiint_{V_A} q_V \cdot dV = q_V \cdot \iiint_{V_A} dV = q_V \cdot V_A = q_V \cdot S \cdot L_A \quad (7.30)$$

Снага генерисана у слоју А се у стационарном стању преноси струјањем на воду на граничној површи 2:

$$q_A = q_V \cdot S \cdot L_A = \alpha \cdot S \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_\infty) \quad (7.31)$$

Из (7.31) се може израчунати температура граничне површи 2:

$$\vartheta_2 = \frac{q_V L_A}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^\circ \text{C} \quad (7.32)$$

Познајући отпор преносу топлоте кроз слој В, може се израчунати температура граничне површи 1:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_A \cdot R_B^T \quad (7.33)$$

$$R_B^T = \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \quad (7.34)$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_V \cdot L_A \cdot S \cdot \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \quad (7.35)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = 115^\circ \text{C} \quad (7.36)$$

Користећи услов (7.15) може се одредити расподела температуре у слоју А:

$$-\frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_2 = \vartheta_1 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} \quad (7.37)$$

$$C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} \quad (7.38)$$

Температура граничне изоловане површи слоја А се добија заменом (7.38) у (7.10):

$$\vartheta_0 = C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = 140^\circ \text{C} \quad (7.39)$$

### **ЗАДАТАК 8**

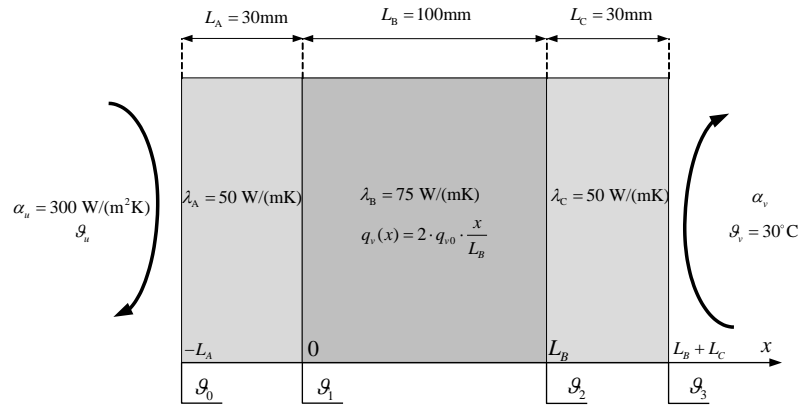
Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала А, В и С. У слоју В се по запремини генерише топлота запреминском густиниом снаге  $q_v(x) = 2 \cdot q_{v0} \cdot \frac{x}{L_B}$  ( $q_{v0} = 250 \cdot 10^3 \text{W/m}^3$ ). Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици. Гранична површ слоја А се хлади уљем непознате температуре ( $\vartheta_u$ ), уз коефицијент



преноса топлоте струјањем  $\alpha_u = 300 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ , а гранична површ слоја С се хлади водом температуре  $\vartheta_3 = 30^\circ\text{C}$ , при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ( $\theta = \vartheta_3 - \vartheta_1$ ) на следећи начин:  $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta|/20)^{0.25}$  ( $\alpha_{v0} = 1000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ ).

Одредити непознату температуру уља тако да се тачно четвртина укупне снаге генерисане у слоју В преноси на уље. Колико износе температуре  $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ?

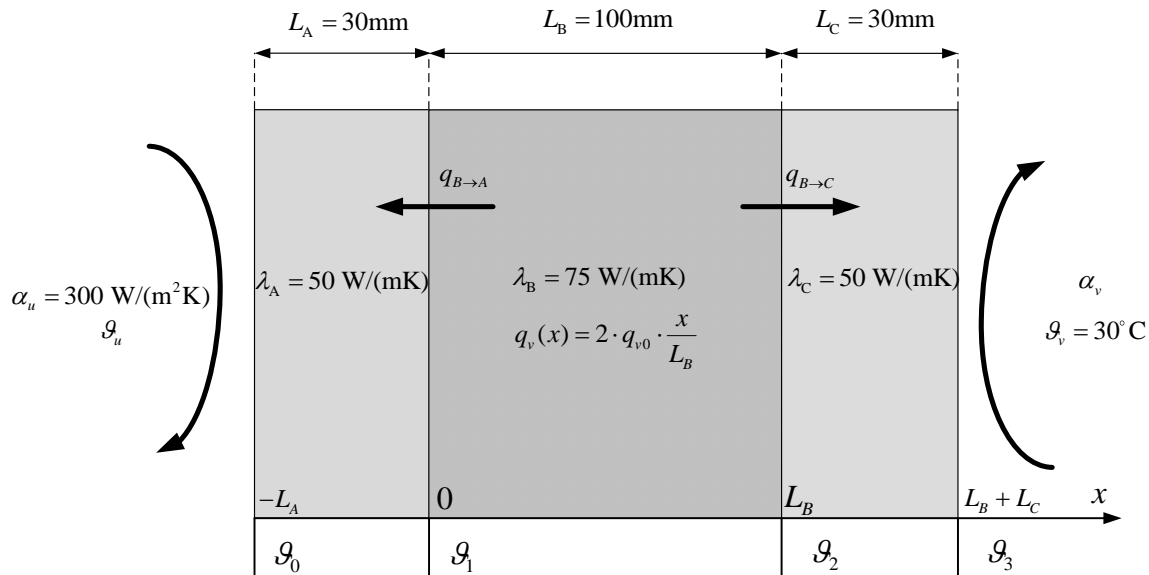
Колико износи и максимална температура слоја В.



### Решење

Укупна снага којом се топлота генерише у области В добија се интеграцијом запреминске густине снаге по запремини области В:

$$q_{genB} = \iiint_B q_v \cdot dV = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x) \cdot S \cdot dx = \frac{q_{v0} \cdot S}{L_B} (L_B^2 - 0) = q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (8.1)$$



Слика 1

На основу услова задатка да се четвртина снаге генерисане у области В преноси на уље, снаге којима се енергија преноси из области В ка области А ( $q_{B \rightarrow A}$ ) и из области В ка области С ( $q_{B \rightarrow C}$ ) (слика 1) износе:

$$q_{B \rightarrow A} = \frac{1}{4} \cdot q_{genB} = \frac{1}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (8.2)$$

$$q_{B \rightarrow C} = q_{genB} - q_{B \rightarrow A} = \frac{3}{4} \cdot q_{genB} = \frac{3}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B$$

С обзиром да се посматра устаљено стање, без генерисања топлоте у области С, целокупна снага која се из области В пренесе ка области С се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура  $\vartheta_3$  ( $\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$ ):

$$q_{strujanja\_v} = q_{B \rightarrow C} = \alpha_v(\theta) \cdot S \cdot \theta = \frac{\alpha_{v0} \cdot S}{20^{0.25}} \cdot \theta^{1.25} \quad (8.3)$$

$$\theta = \left( \frac{q_{B \rightarrow C} \cdot 20^{0.25}}{\alpha_{v0} \cdot S} \right)^{0.8} = \left( \frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot 20^{0.25}}{4 \cdot \alpha_{v0}} \right)^{0.8} = 19^\circ \text{C} \quad (8.4)$$

$$\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v \Rightarrow \vartheta_3 = \theta + \vartheta_v = 49^\circ \text{C} \quad (8.5)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = q_{B \rightarrow C} \cdot R_C^T = q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} \quad (8.6)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} = \vartheta_3 + \frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot L_C}{4 \cdot \lambda_C} = 60.25^\circ \text{C} \quad (8.7)$$

Расподела температуре у области В добија се решавањем опште температурне једначине која за поменућу област има следећи облик:

$$\lambda_B \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \quad (8.8)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = - \frac{q_v(x)}{\lambda_B} = - \frac{2 \cdot q_{v0} \cdot x}{\lambda_B \cdot L_B} \quad (8.9)$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = - \frac{q_{v0} \cdot x^3}{3 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (8.10)$$

Интеграционе константе које фигуришу у (8.10) могу се одредити из граничних услова за десну граничну површ слоја В (на тој граничној површи познајемо и вредност температуре и њен градијент – у овом случају извод по  $x$  координати).

$$\begin{aligned} \vartheta(L_B -) &= \vartheta_2 \\ -\lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(L_B -) \cdot S &= q_{B \rightarrow C} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Након одређивања интеграционих константи, и уврштавањем њихових вредности у једначину (8.10) може се добити температура  $\vartheta_1$ .

$$\vartheta_1 = \vartheta(0) = C_2 = 63.027^\circ \text{C} \quad (8.12)$$

Остале непознате температуре се добијају на следећи начин:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} \Rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_1 - R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} = 59.277^\circ \text{C} \quad (8.13)$$

$$q_{B \rightarrow A} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_u) \Rightarrow \vartheta_u = \vartheta_0 - \frac{q_{B \rightarrow A}}{\alpha_u \cdot S} = 38.44^\circ \text{C} \quad (8.14)$$

Вредност  $x$  координате на којој се постиже максимална температура у области В ( $x^*$ ) може се добити диференцирањем расподеле температуре која је дата изразом (8.10) и изједначавањем добијеног израза са нулом. Потом се заменом из (8.10) за тако добијену вредност  $x^*$  добија максимална температура у области В.

$$x^* = \frac{L_B}{2} = 50 \text{mm} \quad (8.15)$$

$$\vartheta_{\max B} = \vartheta(x^*) = 65.806^\circ \text{C} \quad (8.16)$$

### ЗАДАТАК 9

На слици је приказан конусни пресек тела начињеног од керамике.

Пречник кружног попречног пресека је променљив. У постављеном координатном систему зависност пречника од растојања  $x$  је линеарна и одређена изразом  $D = D_0 + a \cdot x$ , при чему је  $a = -0.25$  и  $D_0 = 62.5 \text{mm}$ . Базис керамичког тела мањег пречника налази се на растојању  $x_1 = L = 200 \text{mm}$  од координатног почетка (слика). Температуре граничних базиса су константне и износе  $T_0 = 400 \text{K}$  и  $T_1 = 600 \text{K}$ , а омотач је идеално топлотно изолован од околине.

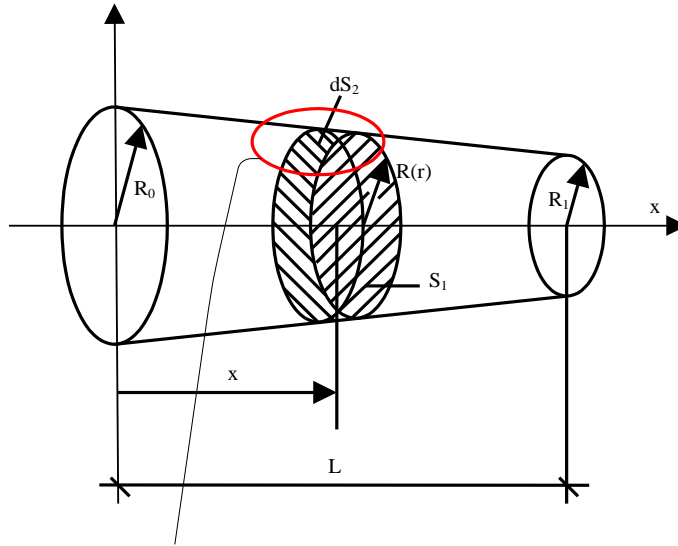
а) извести израз за расподелу температуре по  $x$  координати у општим бројевима

б) израчунати бројну вредност снаге преноса топлоте провођењем од једног до другог базиса

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \vec{i}_x.$$

Специфична топлотна проводност керамике се у посматраном температурном опсегу не мења значајно ( $3.64 \text{ W/mK}$  за  $400 \text{ K}$  и  $3.28 \text{ W/mK}$  за  $600 \text{ K}$ ), па се може усвојити да она има приближно константну вредност од  $3.46 \text{ W/mK}$ .



*Решење*

Из услова да је извод температуре по  $x$  координати константан у сваком од пресека по  $x$  оси следи:

$$\vec{q}_s = \vec{q}_s(x) = \text{const}(r, \varphi) \quad (9.1)$$

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \text{grad} \vartheta = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \right) \quad (9.2)$$

Из (9.1) и (9.2) следи:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \quad (9.3)$$

Флуks вектора површинске густине снаге представља снагу ( $q$ ), чија је вредност константна у сваком од пресека по  $x$  оси:

$$q = \iint_S \vec{q}_s \cdot d\vec{S} \quad (9.4)$$

$$q = \iint_S -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x \cdot dS \quad (9.5)$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \iint_S dS = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{D^2(x) \cdot \pi}{4} \quad (9.6)$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{(D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi}{4} \quad (9.7)$$

Интеграљењем једначине (9.7) може се одредити просторна расподела температуре у стационарном стању:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \quad (9.8)$$

$$d\vartheta = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \cdot dx \quad (9.9)$$

Једначина (9.9) представља диференцијалну једначину код које су променљиве раздвојене. Њено решење се налази интеграцијом:

$$\int_{g_0}^{g(x)} d\mathcal{G} = -\int_0^x \frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \cdot dx \quad (9.10)$$

$$\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}_0 = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot a \cdot \pi} \left( -\frac{1}{D_0 + a \cdot x} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (9.11)$$

Из једначине (9.11) написане за десни базис се може одредити снага којом се преноси топлота између 2 базиса:

$$\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0 = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot a \cdot \pi} \left( -\frac{1}{D_0 + a \cdot L} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (9.12)$$

$$q = -\frac{\lambda \cdot a \cdot \pi \cdot (\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0)}{4 \cdot \left( \frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot L} \right)} = -2.123 \text{ W} \quad (9.13)$$

Заменом израза (9.13) у (9.11), добија се расподела температуре по x оси:

$$\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}_0 + \frac{(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0)}{\left( \frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot L} \right)} \cdot \left( \frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot x} \right) \quad (9.14)$$

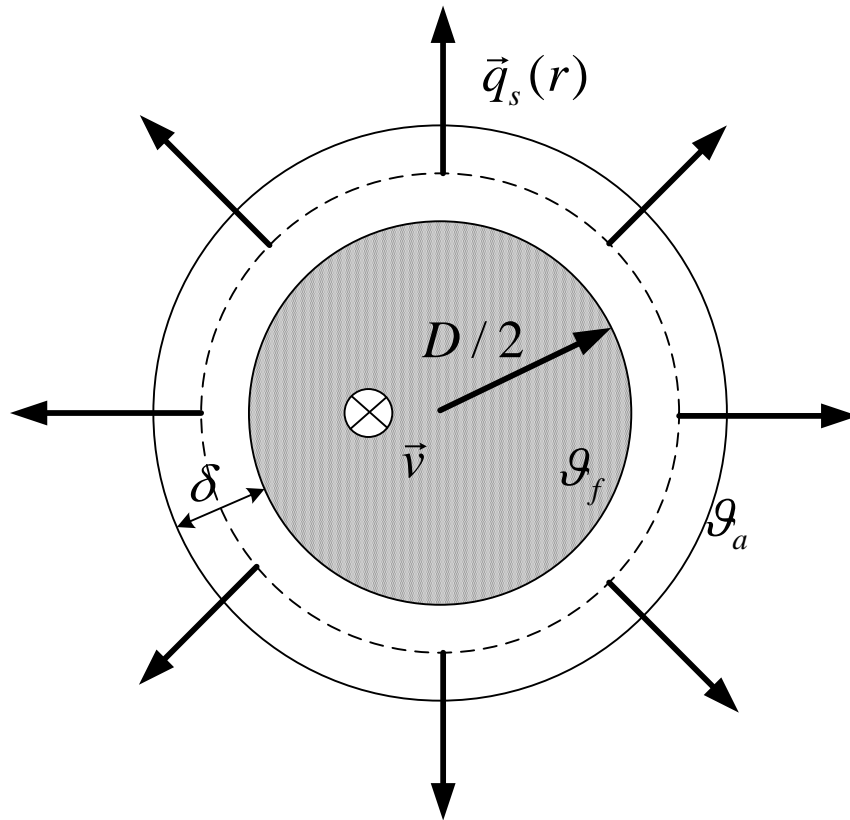
### **ЗАДАТАК 10**

Кроз једну металну цев кружног попречног пресека и спољашњег пречника 40 mm великом брзином протиче флуид температуре веће од амбијента. Може се сматрати да је отпор преласку топлоте струјањем са флуида на унутрашњи зид цеви занемарљиво мали. Цев је танка, тако да се може сматрати да је и отпор провођењу топлоте кроз цев занемарљив. Око цеви се поставља слој изолације топлотне проводности  $\lambda = 0.2 \text{ W / (m K)}$ . Коefицијент преласка топлоте са спољне површи изолације на околни ваздух износи  $\alpha = 8.5 \text{ W / (m}^2 \text{ K)}$ . Одредити при којој дебљини изолације је снага преноса топлоте од флуида ка ваздуху температуре амбијента максимална. Која је минимална дебљина изолације којом се постиже да су губици 50% мањи од оних који се имају када изолација уопште не постоји.

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи

$$\text{grad } \mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \vec{i}_z.$$

*Решење*



Укупан отпор преносу топлоте са флуида ка амбијенту састоји се из отпора преносу топлоте провођењем кроз слој изолације и отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи изолације.

У даљем тексту биће одређена компонента топлотног отпора провођењу кроз слој изолације.

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \text{grad } \vartheta = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \vec{i}_z \right) \quad (10.1)$$

Из разлога симетрије, температура је константна на свакој од цилиндричних површи које су концентричне са металном цеви:

$$\vartheta = \vartheta(r) = \text{const}(\varphi, z) \quad (10.2)$$

Заменом (10.2) у (10.1) се добија:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{i}_r \quad (10.3)$$

Посматра се стационарно стање. Флукс вектора површинске густине снаге кроз цилиндричну површ провучену кроз изолацију, концентрично металној цеви, на растојању  $r$  од центра проводника, представља снагу ( $q$ ) која се преноси из унутрашњости цеви ка расхладном флуиду (ваздуху). Ова снага је иста кроз сваку тако формирану површ, зато што се у изолацији не генерише топлота.

$$q = \iint_S \vec{q}_s \cdot d\vec{S} \quad (10.4)$$

$$q = \iint_S q_s \cdot \vec{i}_r \cdot \vec{i}_r \cdot dS = \iint_S q_s \cdot dS \quad (10.5)$$

$$q = q_s(r) \cdot \iint_S dS = q_s(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad (10.6)$$

Заменом (10.3) у (10.6) се добија:

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad (10.7)$$

чијим решавањем се може одредити расподела температуре дуж радијалних праваца:

$$d\vartheta = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot r \cdot L} \cdot dr \quad (10.8)$$

Интеграцијом од спољне површи цеви до спољне површи изолације се добија:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R + \delta}{R}\right) = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (10.9)$$

Топлотна снага ( $q$ ) која се преноси из унутрашњости цеви ка расхладном флуиду (ваздуху) се може приказати у следећем облику:

$$q = q_L \cdot L \quad (10.10)$$

где је  $q_L$  снага преноса топлоте по јединици дужине.

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R + \delta}{R}\right) = -\frac{q_L}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (10.11)$$

Топлотни отпор изолације по јединици дужине износи:

$$R_{izolacije}^T = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{q_L} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (10.12)$$

Приметимо да у граничном процесу када дебљина изолације  $\delta$  поприма мале вредности, важи следеће:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{izolacije}^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{2 \cdot \delta}{D}\right) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \frac{2 \cdot \delta}{D} = \frac{\delta}{D} \quad (10.13)$$

што је исто као да се топлотни отпор рачунао по формули за раван зид.

Друга компонента топлотног отпора (подужна вредност) износи:

$$R_{strujanja}^T = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} \quad (10.14)$$

Укупан подужни топлотни отпор износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T \quad (10.15)$$

$$R^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} \quad (10.16)$$

Сврха постављања изолације је да се умањи снага која се преноси са флуида ка амбијенту. Снага која се по јединици дужине преноси са флуида ка амбијенту износи:

$$P = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{R^T} \quad (10.17)$$

Да би се поменута снага умањила, потребно је повећати топлотни отпор дат релацијом (10.16). Са повећањем дебљине изолације расте топлотни отпор провођењу топлоте кроз изолацију, али се истовремено повећава и спољна површина изолације са које се струјањем одводи топлота, што доводи до опадања отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи.

Критична дебљина изолације је она при којој снага губитака достиже свој максимум. Да би се одредила критична дебљина изолације, потребно је анализирати зависност топлотних отпора од дебљине изолације. Вредност за коју се има екстремум функције топлотних губитака, односно подужног отпора, добија се изједначавањем првог извода укупног подужног отпора по дебљини изолације са нулом:

$$\frac{\partial R^T}{\partial \delta} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \frac{D}{D + 2 \cdot \delta} \cdot \frac{2}{D} - \frac{2}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)^2} = \frac{-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta}{\pi \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot (D + 2 \cdot \delta)^2} = 0 \quad (10.18)$$

$$-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta_{kr} = 0 \quad (10.19)$$

$$\delta_{kr} = \frac{2 \cdot \lambda - \alpha \cdot D}{2 \cdot \alpha} \quad (10.20)$$

Дата критична дебљина изолације има физички смисао само за  $\delta_{kr} > 0$ . При томе за  $\delta < \delta_{kr}$  укупни топлотни отпор опада (снага губитака расте), а за  $\delta > \delta_{kr}$  расте (снага губитака опада). При некој дебљини изолације, укупни топлотни отпор постаје једнак оном који би се имао да изолација не постоји. Дебљина изолације мора бити већа од те вредности да би се постигао жељени ефекат умањења снаге губитака. Овај случај се најчешће јавља код цеви малог пречника и у случају да се има мала вредност коефицијента преласка топлоте струјањем.

Уколико је  $\delta_{kr} \leq 0$ , тада се за свако  $\delta > 0$  укупна вредност топлотног отпора повећава, а снага губитака смањује.

У конкретном случају, критична дебљина изолације износи:

$$\delta_{kr} = 3.53 \text{ mm} \quad (10.21)$$

Снага губитака по јединици дужине у случају да изолације нема износи:

$$P_{g0} = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} \quad (10.22)$$

Након постављања изолације, нова подужна вредност снаге губитака износи:

$$P_{g1} = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D + 2 \cdot \delta}{D} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)}} \quad (10.23)$$

Пошто је снага губитака много мања од снаге која се посредством флуида преноси дуж цеви, сматрано је да је температура флуида  $\vartheta_f$  иста без обзира на дебљину изолације.

Из поставке задатка је:

$$P_{g0} = 2 \cdot P_{g1} \quad (10.24)$$



$$\frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} = 2 \cdot \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D+2 \cdot \delta}{D} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)}} \quad (10.25)$$

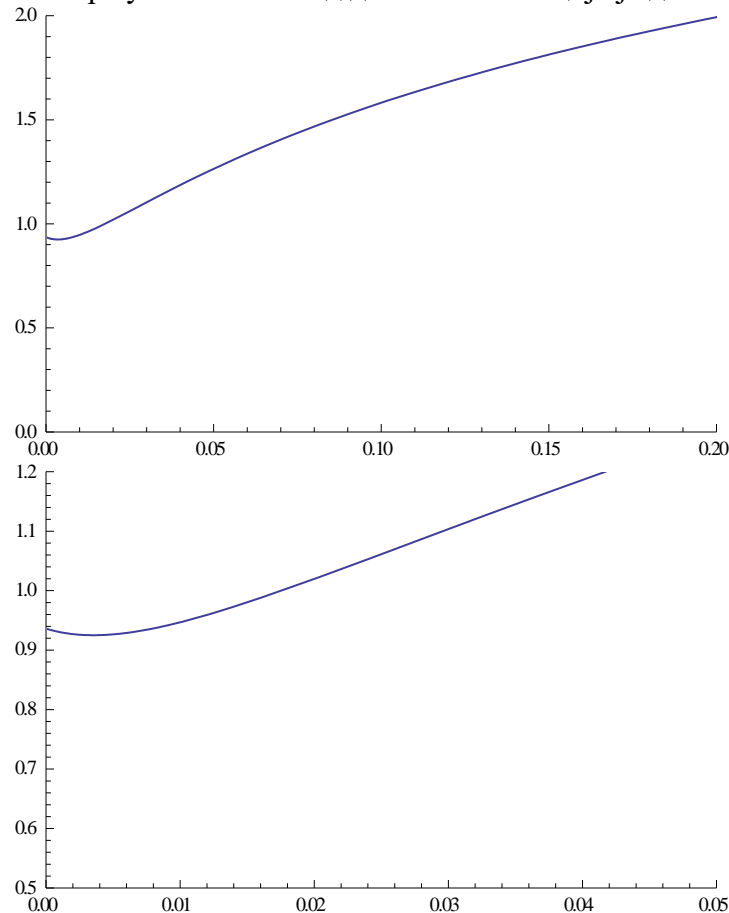
$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D+2 \cdot \delta}{D} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)} = 2 \cdot \frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi} \quad (10.26)$$

Из једначине (10.26) се налази потребна дебљина изолације:

$$\delta = 165.24 \text{ mm} \quad (10.27)$$

што је јако велика вредност, те се поставља питање економске оправданости постављања изолације толике дебљине.

Промена топлотног отпора у зависности од дебљине изолације је дата на слици:



### **ЗАДАТАК 11**

Једножилни кабл пресека бабра (специфична електрична проводност на  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_{20 \text{ Cu}} = 56 \times 10^6 \text{ S/m}$  и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром  $\alpha_{\text{Cu}20} = 4.29 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )  $S_{\text{Cu}} = 95 \text{ mm}^2$ , са PVC изолацијом дебљине изолације  $d_{iz} = 1 \text{ mm}$  (топлотне специфичне проводности  $\lambda_{\text{PVC}} = 0.16 \text{ W/(m K)}$ ) положена је у тло специфичне топлотне отпорности  $\rho_z = 2.5 \text{ (m K)/W}$ . Максимална дозвољена температура PVC изолације износи  $\vartheta_{doz} = 70^\circ\text{C}$ , а температура земље удаљене од кабла  $\vartheta_z = 20^\circ\text{C}$ . Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која

протиче кроз кабл за два случаја: а) да је кабл положен директно у тло, б) да је постављен у кошуљицу сачињену од материјала специфичне топлотне отпорности  $\rho_{zk}=1 \text{ (m K)/W}$  - сматрати да је спољашња површ кошуљице цилиндар ваљка пречника  $D_k=200 \text{ mm}$ . При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтну тло", на коме је температура једнака  $\vartheta_z=20^\circ\text{C}$ , може узети цилиндар ваљка пречника  $D_{ref}=1000 \text{ mm}$ .

*Решење*

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_p} \cdot \ln\left(\frac{D_p}{D_s}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_p}\right) \quad (11.1)$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) \quad (11.2)$$

$\lambda_i$  Специфична топлотна проводност изолације кабла

$\lambda_p$  Специфична топлотна проводност материјала постелице

$\lambda_z$  Специфична топлотна проводност тла (земље)

$D_p$  Пречник (еквивалентно по обиму) спољне површи постелице (за израчунавање за реалну геометрију, круг у правоугаонику, видети лабораторијску вежбу 3.).

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10.998 \text{ mm} \approx 11 \text{ mm} \quad (11.3)$$

$$D_s = D_u + 2 \delta_{iz} = 11 \text{ mm} + 2 \text{ mm} = 13 \text{ mm} \quad (11.4)$$

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0.16 \text{ W/m} \cdot \text{K}} \cdot \ln\left(\frac{13 \text{ mm}}{11 \text{ mm}}\right) + \frac{1 \text{ m} \cdot \text{K/W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{200 \text{ mm}}{13 \text{ mm}}\right) + \frac{2.5 \text{ m} \cdot \text{K/W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000 \text{ mm}}{200 \text{ mm}}\right) = 1.242 \text{ K/W} \quad (11.5)$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0.16 \text{ W/m} \cdot \text{K}} \cdot \ln\left(\frac{13 \text{ mm}}{11 \text{ mm}}\right) + \frac{2.5 \text{ m} \cdot \text{K/W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000 \text{ mm}}{13 \text{ mm}}\right) = 1.89 \text{ K/W} \quad (11.6)$$

$$R_{Cu} = \frac{1}{\sigma \cdot S} (1 + \alpha (70 - 20)) = \frac{1}{56 \cdot 95} (1 + 4.29 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 2.28 \cdot 10^{-4} \Omega \text{ m} \quad (11.7)$$

$$R_{Cu} I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_a}{R_l^T} \quad (11.8)$$

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_a}{R_{Cu} R_l^T}} \quad (11.9)$$

- Са кошуљицом:

$$I = \sqrt{\frac{70-20}{2.28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1.242 \frac{K}{W}}} = 420.2 A \quad (11.10)$$

- Без кошуљице:

$$I = \sqrt{\frac{70-20}{2.28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1.89 \frac{K}{W}}} = 340.6 A \quad (11.11)$$

### **ЗАДАТАК 12**

Колико износи дозвољено струјно оптерећење трофазног самоносивог кабловског снопа (СКС), пресека електропроводног дела фазног проводника  $50 \text{ mm}^2$ , подужног отпора на  $90^\circ \text{C}$   $r_m = 0.365 \Omega/\text{km}$ , који се налази у ваздуху температуре  $\vartheta_a = 24^\circ \text{C}$ , брзине струјања (брзина ветра)  $v_v = 1 \text{ m/s}$ , изложен је дејству зрачења сунца, укупне површинске густине снаге зрачења  $q_s = 600 \text{ W/m}^2$ ? Може се сматрати да је спољашња површ СКС преко које се топлота размењује са околином круг пречника  $D = 58 \text{ mm}$ , а коефицијент сивоће  $\varepsilon = 0.8$ . Параметри ваздуха:  $\lambda = 0.02424 + 7.208 \cdot 10^{-5} \vartheta_a$ ,  $\nu = 1.337 \cdot 10^{-5} + 8.641 \cdot 10^{-8} \vartheta_a + 1.071 \cdot 10^{-10} \vartheta_a^2$ ,  $\beta = 0.003628 - 9.866 \cdot 10^{-6} \vartheta_a$ ,  $c_p = 1007 + 2 (\vartheta_a + 273 - 300)/50$ ,  $\rho = 1.292 \cdot 273.2 / (273.2 + \vartheta_a)$ ,  $\alpha = \lambda / (\rho c_p)$ ,  $Pr = \nu/\alpha$ .

Коефицијент преласка топлоте принудним струјањем са хоризонталног цилиндра на ваздух се може израчунати из израза  $Nu_D = 0.3 + \left( \frac{0.62 \cdot Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{1 + (0.4/Pr)^{2/3}} \right)^{1/4} \left( 1 + (Re_D/282000)^{5/8} \right)^{4/5}$ , где је *Reynolds*-ов број једнак  $Re_D = (V \cdot D)/\nu$

Параметри ваздуха се одређују за средњу вредност температуре површи и ваздуха, за коју се приближно може сматрати да има константну вредност од  $24^\circ \text{C}$ .

Усвојити апроксимацију да је читава спољна површ СКС изложена дејству сунчаног зрачења. У прорачуну уважити и размену топлоте зрачењем између спољне површи СКС и амбијента.

Вредност струје при којој се при стандардним условима (температура ваздуха  $40^\circ \text{C}$ , температура проводника (дефинисана класом изолације)  $90^\circ \text{C}$ , температуре спољне површи СКС  $80^\circ \text{C}$ , брзина ветра  $V = 0 \text{ m/s}$ , зрачење Сунца  $900 \text{ W/m}^2$ ) износи  $176 \text{ A}$ .

Подаци преузети из техничке препоруке Електродистрибуције: вредност струје при којој се при стандардним условима (температура ваздуха  $40^\circ \text{C}$ , температура проводника (дефинисана класом изолације)  $90^\circ \text{C}$ , температуре спољне површи СКС  $80^\circ \text{C}$ , брзина ветра  $V = 0 \text{ m/s}$ , зрачење Сунца  $900 \text{ W/m}^2$ ) износи  $176 \text{ A}$ . Из наведених података из техничке препоруке одредити отпор преносу топлоте провођењем кроз слој изолације.

*Решење*

**Одређивање отпора провођењу топлоте кроз изолацију на основу вредности температура проводника и спољашње површи СКС-а које су дате у Техничкој препоруци 8 б.**

Познате вредности

$$\nu_p := 90 \quad \nu_{spks} := 80 \quad l_s := 176 \quad r_m := 0.00036$$

$$R\lambda := \frac{(\nu_p - \nu_{spks})}{r_m \cdot (l_s)^2} = 0.884 \quad (12.1)$$

**Одређивање коефицијента преласка топлоте код принудног струјања, за услове дате у задатку**

Познате вредности  $V_v := 1 \quad D_{spk} := 0.058 \quad \nu_a := 24$

Параметри ваздуха

$$\lambda(x) := 0.02424 + 7.208 \cdot 10^{-5} \cdot x$$

$$\nu(x) := 1.337 \cdot 10^{-5} + 8.641 \cdot 10^{-8} \cdot x + 1.071 \cdot 10^{-10} \cdot x^2$$

$$\beta(x) := 0.003628 - 9.866 \cdot 10^{-6} \cdot x$$

$$c_p(x) := 1007 + 2 \cdot \frac{(x + 273 - 300)}{50}$$

$$\rho(x) := 1.292 \frac{273.2}{(273.2 + x)}$$

$$a(x) := \frac{\lambda(x)}{c_p(x) \cdot \rho(x)}$$

$$Pr(x) := \frac{\nu(x)}{a(x)}$$

Reynolds-ов број

$$ReF(x) := V_v \cdot \frac{D_{spk}}{\nu(x)}$$

Nusselt-ов број

$$NuF(x) := 0.3 + \frac{\left[ \left( 0.62 \cdot ReF(x)^{\frac{1}{2}} \cdot Pr(x)^{\frac{1}{3}} \right) \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{0.4}{Pr(x)} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{4}}} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{ReF(x)}{282000} \right)^{\frac{5}{8}} \right]^{\frac{4}{5}} \quad (12.1)$$

$$\alpha F(x) := NuF(x) \cdot \frac{\lambda(x)}{D_{spk}} \quad (12.2)$$

$$\alpha F(va) = 14.175 \quad (12.3)$$

Коефицијент преласка топлоте код принудног струјања се одређује на основу параметара ваздуха добијених за температуру ваздуха од 24 степена Целзијусове скале.

### Одређивање површине СКС-а на којој се врши размена топлоте

Познате вредности  $D_{spk} = 0.058$   $Su := 1.1 \cdot 10^{-6}$

Вредност површине попречног пресека носећег ужета је коригована због слоја изолације за 10%

$$S_{spoljashjeg\_omotaca} := \pi \cdot D_{spk} = 0.182$$

Пречник једног проводника са изолацијом (добијен из једнакостраничног троугла странице  $D_p$ )

$$D_p := \frac{\frac{D_{spk}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 0.5} \quad (12.4)$$

Пречник носећег ужета са изолацијом

$$D_u := \sqrt{\frac{4 \cdot Su}{\pi}} \quad (12.5)$$

Угао који носеће уже затвара за размену топлоте са околином

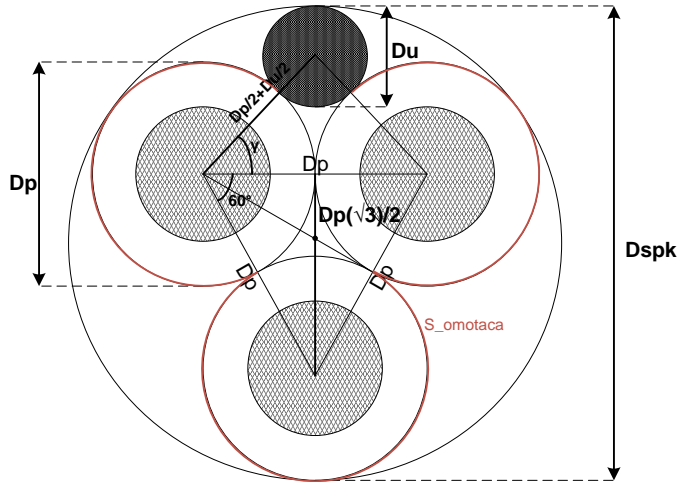
$$\gamma := \frac{180}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{D_p}{D_p + D_u}\right) \quad (12.6)$$

$$\gamma = 31.74$$

Површина СКС-а на којој се размењује топлота

$$S_{omotaca} := \frac{3 \cdot 360 - 3 \cdot 60 - 2 \cdot \gamma}{3 \cdot 360} \cdot 3 \cdot \pi \cdot D_p \quad (12.7)$$

$$S_{omotaca} = 0.197$$



Слика - Попречни пресек КСК-а

### Одређивање температуре спољашње површине КСК-а и дозвољеног струјног оптерећења проводника из система једначина

Познате вредности  $q_s := 600$   $\sigma := 5.67 \cdot 10^{-8}$   $\varepsilon_{spk} := 0.8$

Почетне вредности непознатих величина  $v_k := 70$   $l := 200$

Решавање система две једначине

Given

(1) Једначина биланса снага, при чему се КСК хлади струјањем и зрачењем, а повећању температуре спољашње површи КСК-а доприносе губици у проводнику и снага зрачења сунца

$$(v_k - v_a) \cdot \alpha F(v_a) \cdot S_{omotaca} + \varepsilon_{spk} \cdot \sigma \cdot S_{omotaca} \cdot [(v_k + 273.15)^4 - (v_a + 273.15)^4] = 3 \cdot r_m \cdot l^2 + \frac{S_{omotaca}}{2} \cdot \varepsilon_{spk} \cdot q_s$$

(2) Снага провођења топлоте од проводника кроз изолацију до спољашње површи КСК-а

$$r_m \cdot l^2 = \frac{(v_p - v_k)}{R\lambda}$$

$$prom := \text{Find}(v_k, l)$$

$$prom = \begin{pmatrix} 61.11 \\ 299.146 \end{pmatrix}$$

Решење система једначина

$$v_k := prom_0 = 61.11$$

$$l := prom_1 = 299.146$$

**Провера вредности температуре спољашње површине КСК-а наведене у препоруци Електродистрибуције за референтну дату тачку (стандардне амбијенталне услове)**

Познате вредности

$$\nu_{as} := 40 \quad q_{ss} := 900 \quad g_e := 9.81$$

Одређивање коефицијента преласка топлоте код природног струјања

Rayleigh-ев број

$$Ra_N(x) := \frac{g_e \cdot \beta \left( \frac{x + \nu_{as}}{2} \right) \cdot (x - \nu_{as}) \cdot D_{spk}^3}{\nu \left( \frac{x + \nu_{as}}{2} \right) \cdot a \left( \frac{x + \nu_{as}}{2} \right)} \quad (12.8)$$

Nusselt-ов број

$$Nu_N(x) := \left[ 0.6 + \frac{0.387 \cdot Ra_N(x)^{\frac{1}{6}}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.559}{Pr \left( \frac{x + \nu_{as}}{2} \right)} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right]^2 \quad (12.9)$$

$$\alpha_N(x) := Nu_N(x) \cdot \frac{\lambda \left( \frac{x + \nu_{as}}{2} \right)}{D_{spk}} \quad (12.10)$$

Коефицијент преласка топлоте код природног струјања се одређује са параметрима ваздуха за средњу вредност температуре површи и ваздуха.

Решавање система две једначине

Почетне вредности непознатих величина

$$\nu_k := 80 \quad l := 170$$

**Giver**

(1) Једначина биланса снага, при чему се СКС хлади струјањем и зрачењем, а повећању температуре спољашње површи СКС-а доприносе губици у проводнику и снага зрачења сунца

$$(\nu_k - \nu_{as}) \cdot \alpha_N(\nu_k) \cdot S_{omotaca} + \epsilon_{spk} \cdot \sigma \cdot S_{omotaca} \cdot \left[ (\nu_k + 273.15)^4 - (\nu_{as} + 273.15)^4 \right] = 3 \cdot r_m \cdot l^2 + \frac{S_{omotaca}}{2} \cdot \epsilon_{spk} \cdot q_{ss}$$

(2) Снага провођења топлоте од проводника кроз изолацију до спољашње површи СКС-а

$$r_m \cdot l^2 = \frac{(\nu_p - \nu_k)}{R\lambda}$$

$\text{prom} := \text{Find}(vk, l)$

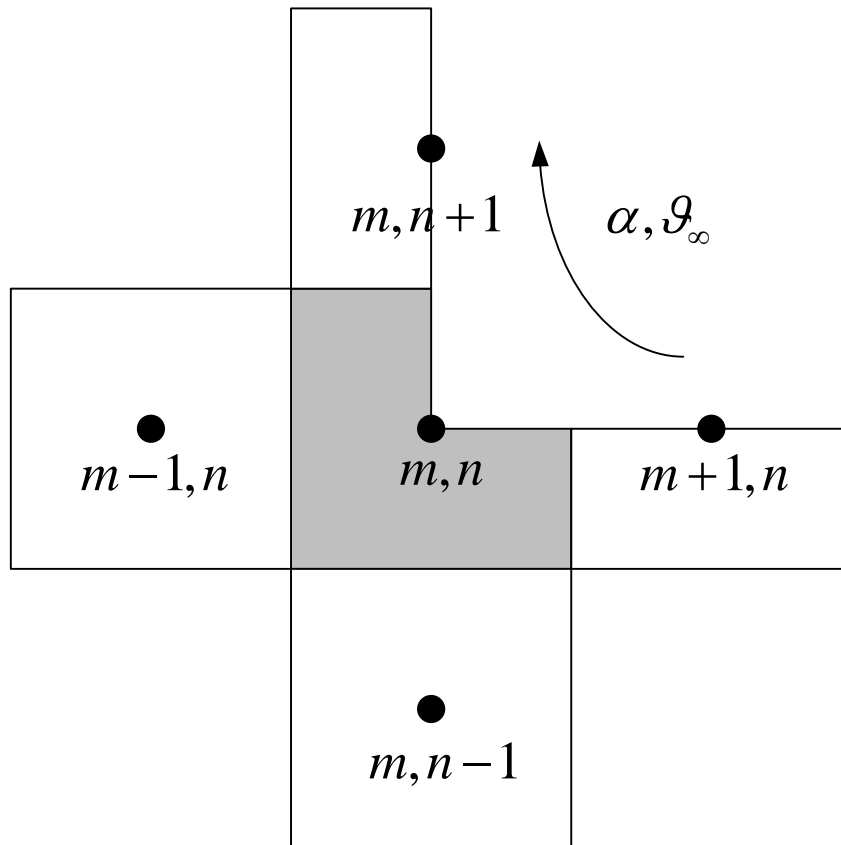
$$\text{prom} = \begin{pmatrix} 81.006 \\ 166.912 \end{pmatrix}$$

Решење система једначина  $\underline{vk} := \text{prom}_0 = 81.006$   $\underline{l} := \text{prom}_1 = 166.912$

При максимално дозвољеној температури проводника од  $90^\circ\text{C}$ , одступање струје од стандардом дате вредности (176 А) је  $-9.088$  А, док је одступање температуре спољашње површи СКС-а  $1.006$  степени.

### ЗАДАТАК 13

Извести израз за методу коначних елемената за елемент топлопроводне средине приказан на слици. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре користити експлицитну методу. Познати су сви подаци о карактеристикама материјала и коефицијенту преласка топлоте струјањем са тела на околни флуид температуре  $\vartheta_\infty$ . Дискретизација топлопроводне средине је извршена тако да је  $\Delta x = \Delta y$ .



*Решење*

Једначине по методи коначних елемената постављају се на основу енергетског биланса и из њега проистеклог биланса снага, примењеног на поједине елементе.



$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (13.1)$$

где су

$P_{gen}$  - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,

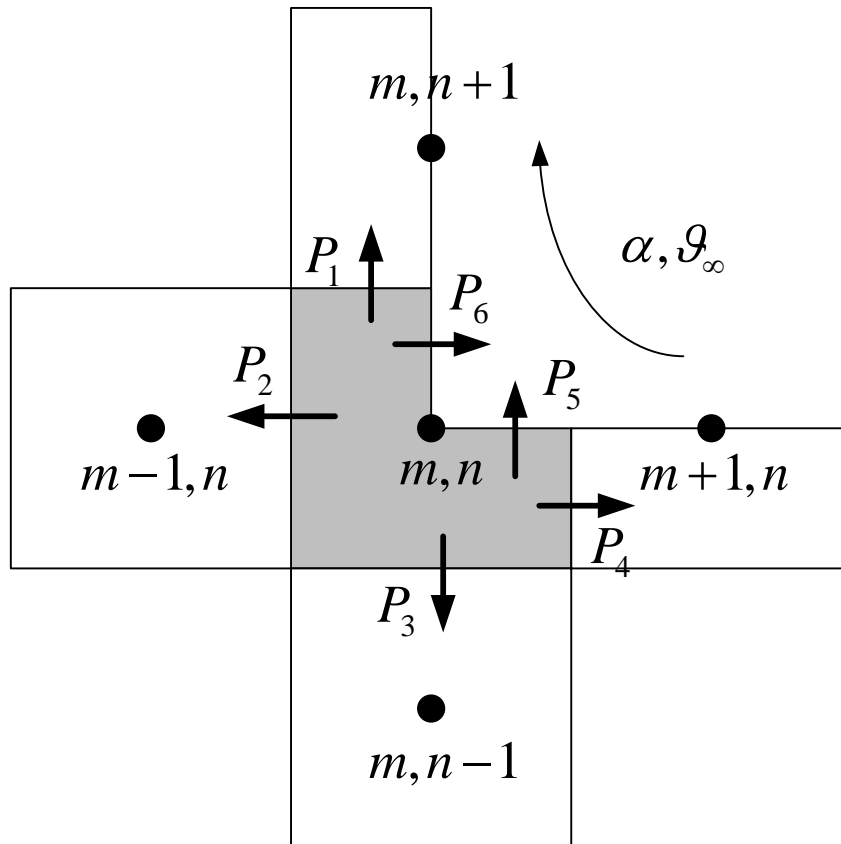
$P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и

$P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

На слици су приказане снаге којима се енергија размењује са суседним елементима и снаге којима се енергија преноси струјањем на флуид. Свака од поменутих снага може се изразити помоћу температура поменутих елемената и параметара средине.

$$P_1 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n+1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x}{2} \cdot L}} \quad (13.2)$$

$$P_2 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m-1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y \cdot L}} \quad (13.3)$$



$$P_3 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n-1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x \cdot L}} \quad (13.4)$$

$$P_4 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m+1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} \quad (13.5)$$

Компоненте снаге којима се енергија преноси струјањем са површи посматраног елемента на флуид износе:

$$P_5 = \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}} \quad (13.6)$$

$$P_6 = \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}} \quad (13.7)$$

Пошто су написани изрази (13.2)-(13.7) са сваку од компонената снаге којима се енергија преноси ка суседним елементима, може се одредити и израз за укупну снагу којом се енергија преноси из посматраног елемента ка остатку материјалне средине.

$$P_{prenosa} = \sum_{i=1}^6 P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \quad (13.8)$$

Заменом израза (13.2)-(13.7) у (13.8) се добија:

$$P_{prenosa} = \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n+1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_{m-1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n-1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_{m+1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}} + \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}} \quad (13.9)$$

Укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу износи:

$$P_{gen} = q_v \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (13.10)$$

Укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу износи:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \frac{dg_{m,n}}{dt} \quad (13.11)$$

Извод температуре по времену у једначини (13.11) се мора дискретизовати. У супротном, добијена једначина би била диференцијална једначина првог реда, а одређивање расподеле температуре у коначном (али јако великом) броју елемената би изискивао решавање система диференцијалних једначина. Уколико се извод по времену у једначини (13.11) дискретизује, добија се систем алгебарских једначина.

У оба случаја олакшавајућа околност је то што је одговарајућа матрица система слабо попуњена, што је директна последица чињенице да сваки од елемената енергију размењује само са себи суседним елементима.

Пошто се ради о експлицитној методи, извод по времену се дискретизује као количник разлике температура посматраног елемента у наредном (p+1-ом) и текућем (p-том) тренутку и одговарајућег корака временске дискретизације ( $\Delta t$ ).

$$\frac{d\mathcal{G}_{m,n}}{dt} \approx \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (13.12)$$

Заменом израза (13.12) у једначину (13.11) се добија коначан израз за снагу којом се енергија акумулише у посматраном елементу:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (13.13)$$

Заменом једначина (13.9), (13.10) и (13.13) у (13.1) се добија:

$$\begin{aligned} q_v \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L = \rho \cdot c_p \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p}{\Delta t} + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^p - \mathcal{G}_{m,n+1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \\ + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^p - \mathcal{G}_{m-1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^p - \mathcal{G}_{m,n-1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^p - \mathcal{G}_{m+1,n}^p}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^p - \mathcal{G}_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \end{aligned} \quad (13.14)$$

Даљим сређивањем израза (13.14) се добија:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{m,n}^{p+1} = \frac{q_v \cdot \Delta t}{\rho \cdot c_p} + \frac{4}{3} \cdot Fo \cdot Bi \cdot \mathcal{G}_{\infty} + \frac{2}{3} \cdot Fo \cdot (\mathcal{G}_{m,n+1}^p + 2 \cdot \mathcal{G}_{m-1,n}^p + 2 \cdot \mathcal{G}_{m,n-1}^p + \mathcal{G}_{m+1,n}^p) + \\ + (1 - 4 \cdot Fo - \frac{4}{3} \cdot Bi \cdot Fo) \cdot \mathcal{G}_{m,n}^p \end{aligned} \quad (13.15)$$

где су Fourier-ов и Biot-ов број дати следећим изразима:

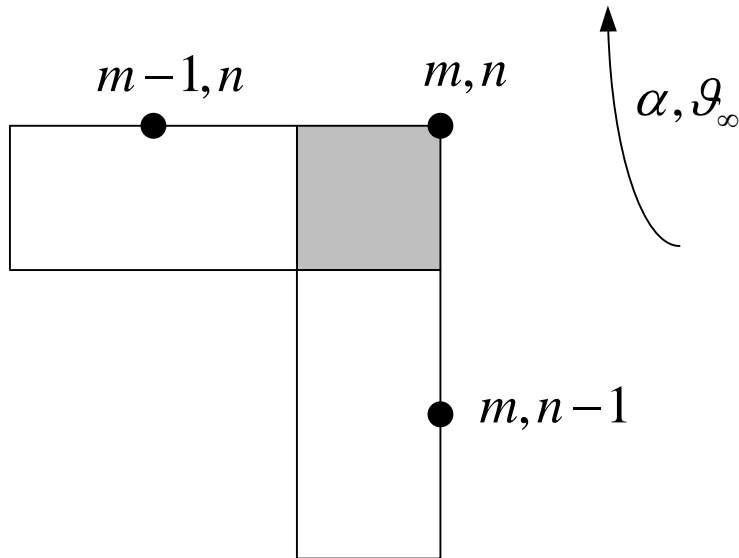
$$Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \quad (13.16)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (13.17)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} \quad (13.18)$$

#### **ЗАДАТАК 14**

Извести израз за методу коначних елемената за елемент топлопроводне средине приказан на слици. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре користити имплицитну методу. Познати су сви подаци о карактеристикама материјала и коефицијенту преласка топлоте струјањем са тела на околни флуид температуре  $\mathcal{G}_{\infty}$ . Дискретизација топлопроводне средине је извршена тако да је  $\Delta x = \Delta y$ .



*Решење*

При постављању једначина по методи коначних елемената користићемо исти поступак као у задатку 13. Једина разлика биће у дискретизацији извода температуре посматраног елемента по времену (у овом случају се користи имплицитна метода).

На основу биланса снага (који директно следи из енергетског биланса) примењеног на посматрани елемент (слика), може се написати следећа једначина:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (14.1)$$

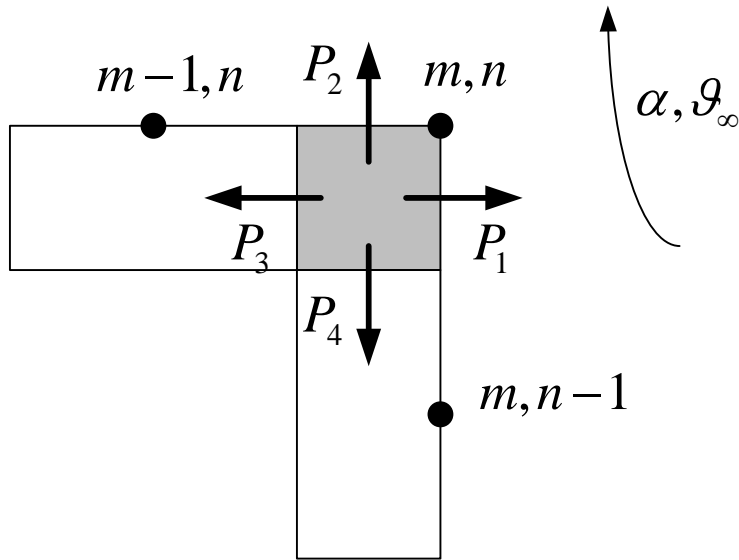
где су

$P_{gen}$  - укупна снага којом се топлотна енергија генерише унутар посматраног елемента,

$P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и

$P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује са осталим елементима и флуидом.

Снага којом се топлотна енергија размењује са околином има више компонената које су означене на слици и могу се изразити преко одговарајућих температура и параметара средине.



$$P_1 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{1} \cdot \frac{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}{2} \quad (14.2)$$

$$P_2 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{1} \cdot \frac{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}{2} \quad (14.3)$$

$$P_3 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m-1,n}^{p+1}}{1 \cdot \frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}{2} \quad (14.4)$$

$$P_4 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m,n-1}^{p+1}}{1 \cdot \frac{\Delta y}{2}} \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}{2} \quad (14.5)$$

У овом случају, за разлику од задатка 13, са  $p+1$  је означен садашњи тренутак.

Укупна снага којом се енергија преноси ка околина износи:

$$P_{prenosa} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad (14.6)$$

Заменом израза (14.2), (14.3), (14.4) и (14.5) у једначину (14.6) се добија коначан израз за снагу којом се топлота преноси ка околина:

$$P_{prenosa} = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{1} \cdot \frac{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}{2} + \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{1} \cdot \frac{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}{2} + \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m-1,n}^{p+1}}{1 \cdot \frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}{2} + \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m,n-1}^{p+1}}{1 \cdot \frac{\Delta y}{2}} \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}{2} \quad (14.7)$$

Снага којом се топлотна енергија генерише у посматраној запремини износи:

$$P_{gen} = q_v \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (14.8)$$

Снага којом се топлотна енергија акумулише у посматраној запремини износи:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta_{m,n}}{\partial t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (14.9)$$

Извод температуре посматраног елемента по времену, који фигурише у (14.9), може се дискретизовати и апроксимирати као количник разлике температура посматраног елемента у садашњем и претходном тренутку и корака временске дискретизације.

$$\frac{d\vartheta_{m,n}}{dt} \approx \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (14.10)$$

Заменом (14.10) у (14.9) се добија коначан израз за снагу којом се енергија акумулише:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (14.11)$$

Заменом (14.7), (14.8) и (14.11) у (14.1) се добија:

$$\begin{aligned} q_v \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{1} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{1} + \\ + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m-1,n}}{1} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n-1}}{1} + \\ + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot L + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot L \end{aligned} \quad (14.12)$$

Даљим сређивањем претходне једначине се добија:

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} \cdot (1 + 4 \cdot Fo + 4 \cdot Fo \cdot Bi) - 2 \cdot Fo \cdot (\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1}) = 4 \cdot Fo \cdot Bi \cdot \vartheta_{\infty} + \vartheta_{m,n}^p \quad (14.13)$$

где су Fourier-ов и Biot-ов број дати следећим изразима:

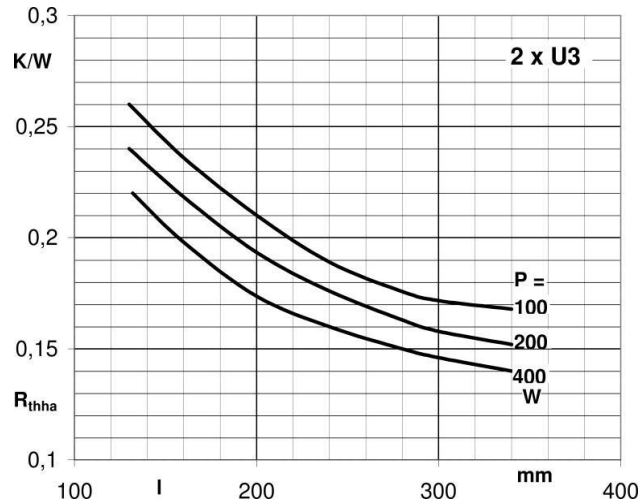
$$Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \quad (14.14)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (14.15)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} \quad (14.16)$$

### **ЗАДАТАК 15**

На слици је дата зависност топлотног отпора једног хладњака од његове дужине и снаге губитака компоненте коју хлади. Полазећи од чињенице да је у топлотном отпору доминантан отпор преласку топлоте струјањем са површи хладњака на ваздух, и да се може сматрати да је коефицијент преласка топлоте струјањем сразмеран (коефицијент сразмерности је  $C$ ) разлици температуре хладњака и температуре амбијента на степен  $n$ , одредити вредност топлотног отпора за снагу губитака 600 W и дужину хладњака од 200 mm. При томе коефицијенте  $C$  и  $n$  треба одредити са кривих снаге за 100 и 400 W.



Решење

Према услову задатка

$$\alpha = C(\vartheta - \vartheta_a)^n \quad (15.1)$$

Топлотни отпор преласку топлоте износи:

$$R = \frac{1}{\alpha S} = \frac{1}{C S (\vartheta - \vartheta_a)^n} \quad (15.2)$$

Топлотни отпори за снагу губитака од 100 W и 400 W износе

$$R_{100} = 0.21 \frac{K}{W} \quad (15.3)$$

$$R_{400} = 0.175 \frac{K}{W} \quad (15.4)$$

Пораст температуре хладњака у односу на амбијент

$$(\vartheta - \vartheta_a)_{100} = R_{100} 100 = 21 \quad (15.5)$$

$$(\vartheta - \vartheta_a)_{400} = R_{400} 400 = 70 \quad (15.6)$$

Према (15.2):

$$\frac{R_{400}}{R_{100}} = \left( \frac{(\vartheta - \vartheta_a)_{100}}{(\vartheta - \vartheta_a)_{400}} \right)^n \quad (15.7)$$

$$n = \frac{\ln \frac{R_{400}}{R_{100}}}{\ln \frac{(\vartheta - \vartheta_a)_{100}}{(\vartheta - \vartheta_a)_{400}}} = \frac{\ln \frac{0.175}{0.21}}{\ln \frac{21}{70}} = 0.15143 \quad (15.8)$$

Према (15.2):

$$C S = \frac{1}{R_{100} (\vartheta - \vartheta_a)_{100}^n} \quad (15.9)$$

$$C S = \frac{1}{0.21 \cdot 21^{0.15143}} = 3.003 \quad (15.10)$$

Пораст температуре при снази губитака \$P\$:

$$\vartheta - \vartheta_a = \frac{P}{\alpha S} = \frac{P}{C S (\vartheta - \vartheta_a)^n} \quad (15.11)$$

$$\vartheta - \vartheta_a = \left( \frac{P}{C S} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (15.12)$$

$$(\vartheta - \vartheta_a)_{600} = \left( \frac{600}{3.003} \right)^{\frac{1}{1.15143}} = 99.548 \quad (15.13)$$

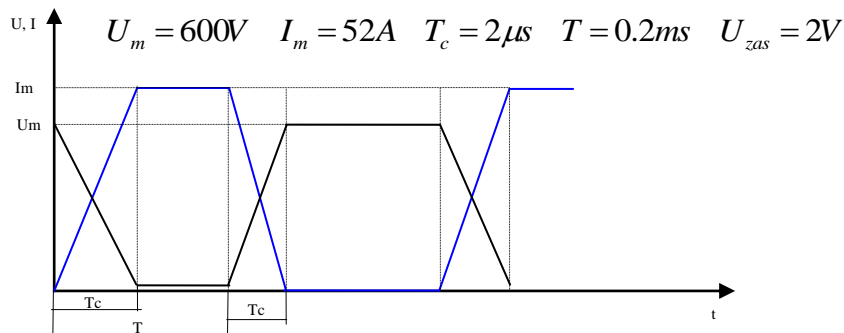
Конечно, вредност топлотног отпора за снагу губитака 600 W износи

$$R_{600} = \frac{1}{\alpha S} = \frac{1}{C S (\vartheta - \vartheta_a)_{600}^n} = \frac{1}{3.003 \cdot 99.548^{0.15143}} = 0.1659 \frac{K}{W} \quad (15.14)$$

### ЗАДАТАК 16

Heat sink

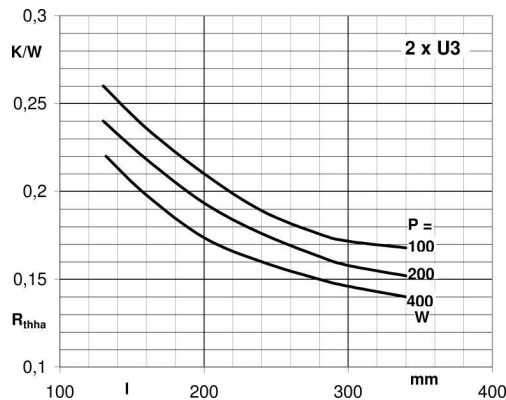
Посматрајмо један IGBT који ради у неком колу на следећи начин



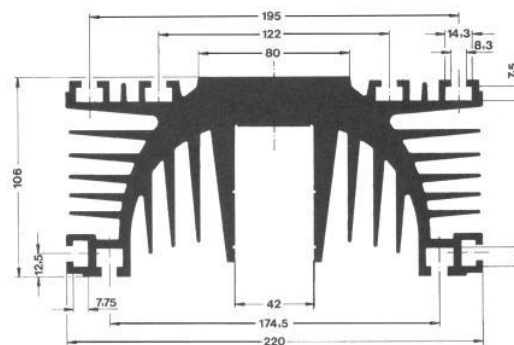
За дати режим рада и тип хладњака дужине 200mm који се користи за хлађење IGBT-а одредити температуре места генерисања губитака у устаљеном стању ако је познато:

Отпор провођењу топлоте кроз транзистор је  $R_t = 0.4 \frac{K}{W}$  а еквивалентни отпор провођењу

топлоте кроз хладњак и еквивалентни отпор преласку топлоте природним струјањем са хладњака на околни ваздух је дат на слици 1  $R_h(l, P)$ . Температура амбијента је 25 °C



Слика 1



Слика 2



Решење:

Временске зависности напона и струје транзистора приказаних на графику можемо исказати аналитички

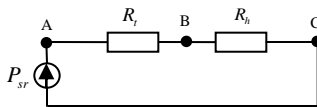
$$U(t) = \begin{cases} U_m - \frac{U_m}{T_c} t; & 0 < t \leq T_c \\ U_{zas}; & T_c < t \leq T \\ \frac{U_m}{T_c} (t - T); & T < t \leq T + T_c \\ U_m; & T + T_c < t \leq 2T \end{cases} \quad I(t) = \begin{cases} \frac{I_m}{T_c} t; & 0 < t \leq T_c \\ I_m; & T_c < t \leq T \\ I_m - \frac{I_m}{T_c} (t - T); & T < t \leq T + T_c \\ 0; & T + T_c < t \leq 2T \end{cases}$$

Тренутна снага је дана изразом  $P(t) = U(t)I(t)$

Видимо да су учестаности промене снаге велике па нам те промене тренутне снаге неће играти улогу у термичким процесима због чега одређујемо средњу снагу помоћу:

$P_{sr} = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} P(t) dt$ ; када се уврсте бројне вредности добијамо да је средња снага губитака у транзистору 103.5W.

Еквивалентна термичка шема је приказана на слици 3.



Слика 3

Са слике 3 се види да тачка В представља спој хладњака и транзистора. Видимо да се са једне стране тачке В налази отпор провођењу топлоте кроз транзистор а са друге еквивалентни отпор провођењу топлоте кроз хладњак и отпор преносу топлоте струјањем са хладњака на околни ваздух. Тачка С представља околину и она се налази на референтном потенцијалу односно на температури околине. Тачка А представља тачку генерисања губитака. У тачку А инјектирамо снагу губитака  $P_{sr}$  и њен потенцијал односно температура претставља тражену температуру.

У устаљеном стању сва снага која се генерише у транзистору мора да се одведе са хладњака у околину. Да би смо одредили температуру тачке А треба да познајемо отпоре преносу топлоте. Отпор  $R_t$  је познат и његова вредност је дата у тексту задатка. Такође и вредност отпора  $R_h$  је дата али у табеларној форми. Пошто смо одредили вредност

губитака, а знајући да је дужина хладњака 200 mm лако са графика  $R_h(l, P)$  одређујемо да је вредност отпора  $R_h = 0.21 \frac{K}{W}$ .

На основу тих података добијамо да су падови температуре на отпорима  $R_h$  и  $R_t$ ,  $R_h(200mm, P_{sr})P_{sr} = 21.735K$  и  $R_t P_{sr} = 41.4K$  респективно. Тада је укупан пораст температуре тачке А у односу на амбијент једнак збиру те две вредности и износи 63.14 K, а температура тачке А је 88.14°C

### **ЗАДАТАК 17**

Коефицијент преласка топлоте, одређен из номиналних података хладњака, износи  $k_p = 455 W / (m^2 K)$ . Вредност фактора хладњака  $F$  је блиска јединици, због чега се хладњак може посматрати као елементарни облик хладњака кога сачињавају две цилиндричне коаксијалне цеви кроз које уље и вода протичу у супротним смеровима. Пречник унутрашње цеви (број цеви износи  $N_c = 109$ , а дужина  $L_c = 1.993m$ ), кроз коју протиче вода, износи  $d_{ucv} = 13 mm$ , дебљина цеви  $\delta_{cv} = 1 mm$ , док је еквиваленти унутрашњи пречник цеви кроз коју протиче уље и која је идеално топлотно изолована од околине,  $d_{ucu} = 22 mm$ . Проток воде и уља кроз еквиваленти елементарни хладњак (две концентричне цеви) је  $N_c$  пута мањи од протока кроз стварни хладњак, а коефицијент проласка топлоте исти.

Током зиме, трансформатор је искључен са мреже, и поново укључен после дужег времена ван погона. У тренутку укључења, температура масе уља у суду (температура уља које улази у хладњак) износи  $\mathcal{G}_{uu} = -6^\circ C$ . Може се сматрати да су протоци уља и воде приближни номиналним ( $Q_{vode} = 4.167 \times 10^{-3} m^3/s$ ,  $Q_{ulja} = 22.2 \times 10^{-3} m^3/s$ ) и да је коефицијент преласка топлоте једнак вредности у номиналном режиму. Параметри воде и уља:  $\rho_v = 1001 kg/m^3$ ,  $c_{pv} = 4209 J/(kg K)$ ,  $\rho_u = 895 kg/m^3$ ,  $c_{pu} = 2198 J/(kg K)$ . Написати једначине из којих се може одредити минимална температура воде на уласку у хладњак при којој неће долазити до смрзавања воде у хладњаку?

*Решење*

Коефицијент проласка топлоте хладњака, одређен из номиналних података о хладњаку:

$$tu\_ul\_nom := 72$$

$$tv\_ul\_nom := 25$$

$$tu\_iz\_nom := 64$$

$$tv\_iz\_nom := 42$$

$$Qu\_nom := \frac{22.2}{1000} = 0.0222$$

$$Qv\_nom := \frac{15}{3600} = 4.167 \times 10^{-3}$$

$$Q\_nom := 298 \cdot 10^3$$

$$S\_hladjaka := Nc \cdot \pi \cdot dcvsr \cdot 2 \cdot Lc = 19.109$$

$$dt\_ul := tu\_ul\_nom - tv\_iz\_nom$$

$$dt\_izl := tu\_iz\_nom - tv\_ul\_nom$$

---

$$P := \frac{tv\_iz\_nom - tv\_ul\_nom}{tu\_ul\_nom - tv\_ul\_nom} = 0.362$$

$$R := \frac{tu\_ul\_nom - tu\_iz\_nom}{tv\_iz\_nom - tv\_ul\_nom} = 0.471$$

$$F := 1 \quad \text{Приближно 1 (тачно 0.98)}$$

Фактор облика хладњака - графици промене овог фактора се могу наћи у литератури

$$k_p := \frac{\left( Q\_nom \cdot \ln \left( \frac{dt\_izl}{dt\_ul} \right) \right)}{S\_hladjaka \cdot (dt\_izl - dt\_ul)} = 454.608$$

Улазни податак за прорачун температуре воде на уласку у хладњак и температуре уља на изласку из хладњака (уље и вода протичу у супротним смеровима):

tu\_izl Temperatura ulja na kraju gde voda izlazi i ulje ulazi

tu\_ul Temperatura ulja na kraju gde voda ulazi i ulje izlazi

tv\_izl Temperatura vode na kraju gde voda izlazi i ulje ulazi

tv\_ul Temperatura vode na kraju gde voda ulazi i ulje izlazi

$$tu_{izl} := -6 \quad tv_{izl} := 0$$

$$Qu := \frac{Qu_{nom}}{Nc} = 2.037 \times 10^{-4} \quad Qv := \frac{Qv_{nom}}{Nc} = 3.823 \times 10^{-5}$$

$$tu_{ul} := -2 \quad tv_{ul} := 2$$

Given

$$\rho_v \cdot Qv \cdot cp_v \cdot (tv_{ul} - tv_{izl}) = \rho_u \cdot Qu \cdot cp_u \cdot (tu_{ul} - tu_{izl})$$

$$\ln \left[ \frac{(tv_{izl} - tu_{izl})}{(tv_{ul} - tu_{ul})} \right] = kp \cdot (\pi \cdot dcvsr \cdot 2 \cdot Lc) \cdot \left[ \frac{-1}{(\rho_v \cdot Qv \cdot cp_v)} + \frac{1}{(\rho_u \cdot Qu \cdot cp_u)} \right]$$

Solution := Find(tu\_ul, tv\_ul)

$$tu_{ul} := Solution_0 \quad tv_{ul} := Solution_1 \quad Solution = \begin{pmatrix} -4.611 \\ 3.455 \end{pmatrix}$$

$$tv_{ul} = 3.455$$

### **ЗАДАТАК 18**

Полазећи од познатог дијаграма расподеле температуре уља по висини трансформатора са ODAF хлађењем када се он хлади помоћу 5 хладњака (укључене пумпе и вентилатори на 5 хладњака, када укупни проток уља износи  $150 \text{ m}^3/\text{h}$ ), нацртати дијаграм расподеле температура уља када се укључи још један (шести) хладњак (са својим пумпама и вентилаторима). Сматрати да су губици при радном режиму са 5 и са 6 хладњака исти. Усвојити следеће апроксимације и претпоставке: а) да при раду 5 хладњака од укупног притиска који произведе пумпа 80 % "отпадне" на пад притиска у хладњаку, а 20 % на пад притиска у активном делу трансформатора, б) да пад притиска на хладњаку и пад притиска у активном делу трансформатора расту линеарно са порастом протока, при чему се константе пропорционалности пада притиска разликују, в) да је снага преноса топлоте преко хладњака при константном протоку сразмерна порасту средње температуре уља у односу на амбијент, г) да се физичке карактеристике уља занемарљиво мало мењају у радном режиму хлађења са 5 и са 6 хладњака. Зависност произведеног притиска пумпе ( $P_a$ ) у функцији протока уља у  $\text{m}^3/\text{h}$  ( $Q$ ) гласи

$$p_p = 530.2 - 0.903 \cdot Q - 0.1895Q^2 - 0.00071164Q^3.$$

*Решење*

Пораст температура уља у односу на амбијент при раду 5 хладњака:

горње уље -  $\theta_{gu5}$ , средње уље -  $\theta_{su5}$ , доње уље -  $\theta_{du5}$

Снага губитака у трансформатору:  $P_g$

Снага хлађења по једном хладњаку када ради 5 хладњака:  $P_h = P_g / 5$

Снага хлађења по једном хладњаку када ради 6 хладњака:  $P_h = P_g / 6$

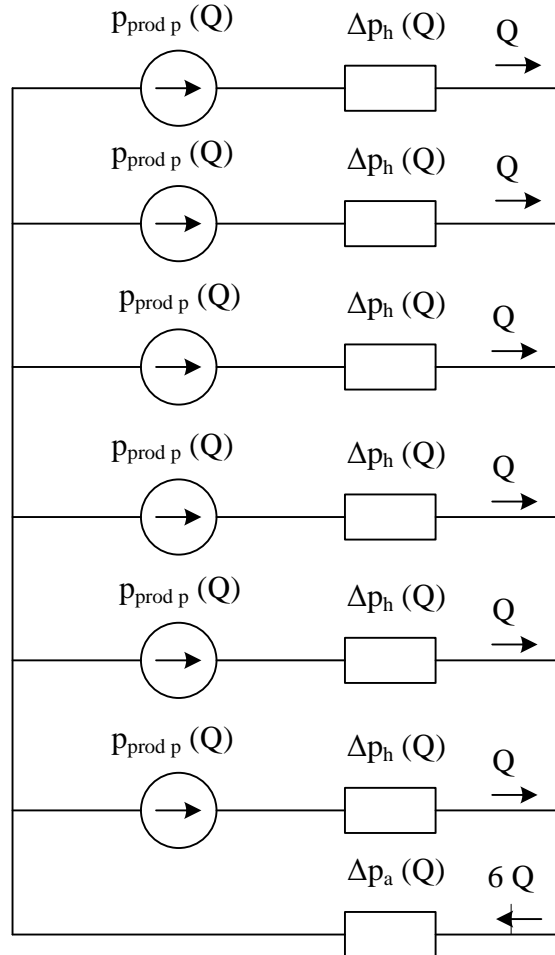
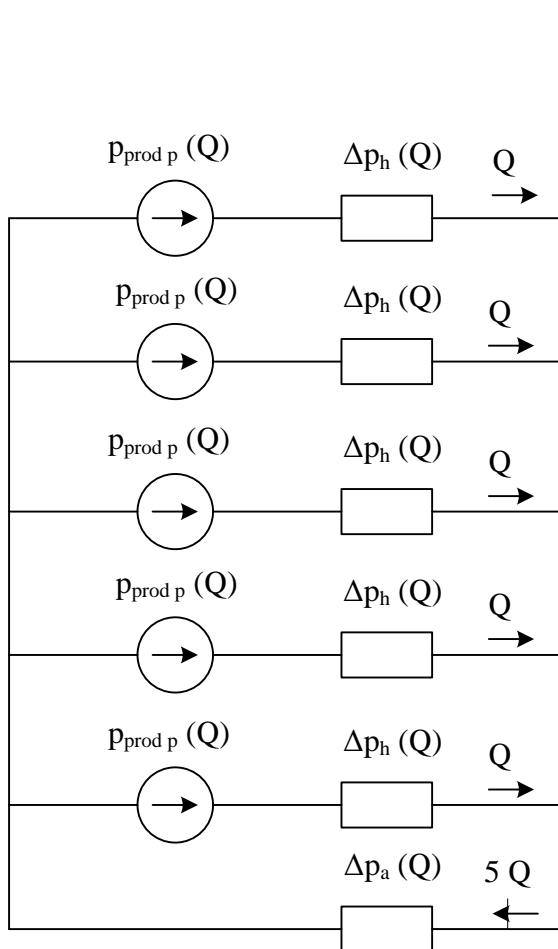
$$\theta_{su5} = c \cdot P_g / 5 \Rightarrow c = \theta_{su5} / (P_g / 5)$$

$$\theta_{su6} = c \cdot P_g / 6 = (\theta_{su5} / (P_g / 5)) \cdot (P_g / 6) = 5 / 6 \theta_{su5}$$

$$\theta_{gu6} = \theta_{su6} + \Delta\theta_{u6} / 2$$

$$\theta_{du6} = \theta_{su6} - \Delta\theta_{u6} / 2$$

$$\Delta\theta_{u6} = ?$$



$$P_{\text{Pumpa}}(Q) := 530.2 - 0.903Q - 0.1895Q \cdot Q - 0.00071164Q \cdot Q \cdot Q$$

$$P_{\text{Pumpa}}\left(\frac{150}{5}\right) = 313.346$$

$$dP_{\text{Hladnjak\_ref}} := 0.8P_{\text{Pumpa}}\left(\frac{150}{5}\right)$$

$$dP_{\text{AktivniDeo\_ref}} := 0.2P_{\text{Pumpa}}\left(\frac{150}{5}\right)$$

$$C_{dP\_Hladnjak} := \frac{dP_{\text{Hladnjak\_ref}}}{\frac{150}{5}}$$

$$C_{dP\_AktivniDeo} := \frac{dP_{\text{AktivniDeo\_ref}}}{150}$$

$$Q_{h\_6p} := 100 \quad \text{Почетна вредност}$$

Given

$$P_{\text{Pumpa}}(Q_{h\_6p}) = C_{dP\_Hladnjak} \cdot Q_{h\_6p} + C_{dP\_AktivniDeo} \cdot 6 \cdot Q_{h\_6p}$$

$$\text{pom} := \text{Find}(Q_{h\_6p})$$

$$Q_{h\_6} := \text{pom}$$

$$Q_{h\_6} = 29.497 \quad \text{Проток кроз сваку од 6 пумпи}$$

$$P_h = \rho Q c_p \Delta\theta_u$$

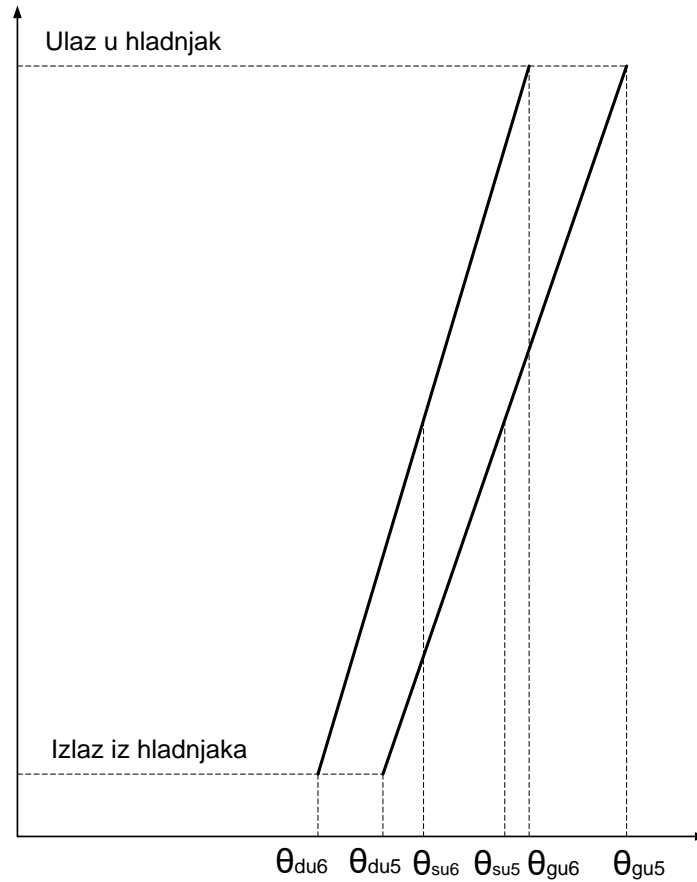
$$\text{Ради 5 хладњака: } P_g / 5 = \rho Q_{h5} c_p \Delta\theta_{u5}$$

$$\text{Ради 6 хладњака: } P_g / 6 = \rho Q_{h6} c_p \Delta\theta_{u6}$$

$$\Delta\theta_{u6} = (5 / 6) (Q_{h5} / Q_{h6}) \Delta\theta_{u5} = (5 / 6) (30 / 29.5) \Delta\theta_{u5} = 0.847 \Delta\theta_{u5} = 0.847 (\theta_{gu5} - \theta_{du5})$$

$$\theta_{gu6} = (5 / 6) (\theta_{gu5} + \theta_{du5}) / 2 + (0.847 (\theta_{gu5} - \theta_{du5})) / 2$$

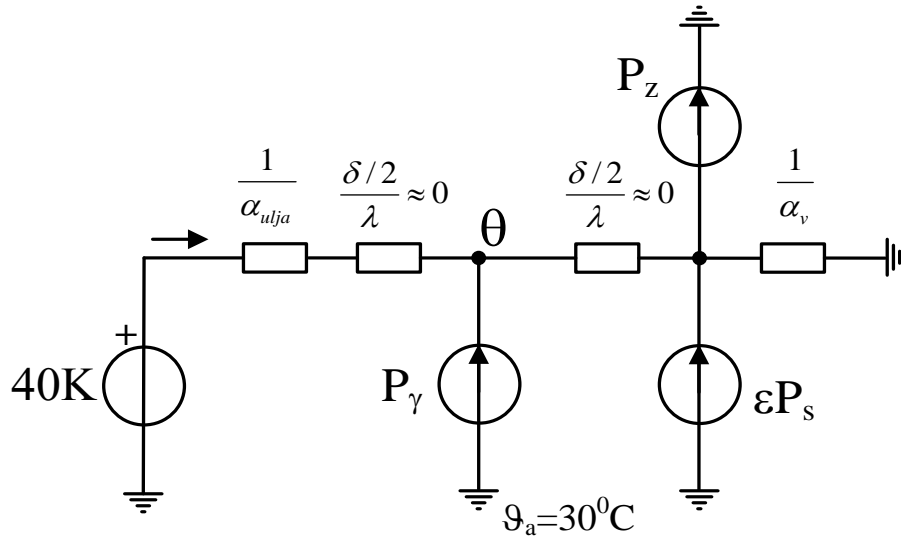
$$\theta_{du6} = (5 / 6) (\theta_{gu5} + \theta_{du5}) / 2 - (0.847 (\theta_{gu5} - \theta_{du5})) / 2$$



### **ЗАДАТАК 19**

Зид суда енергетског уљног трансформатора се загрева услед расутог флуksа. Температура уља износи  $70^{\circ}\text{C}$ , температура амбијента  $30^{\circ}\text{C}$ . Коефицијент размене топлоте струјањем између уља и површ суда износи  $65 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ , а између површи суда и ваздуха  $7 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Коефицијент сивоће површи суда износи  $0.8$ . Која је гранична вредност површинске густине снаге загревања услед расутог флуksа при којој се уље хлади преко површи зида суда? Ову вредност одредити за два случаја: у току ноћи и у току дана при површинској густини снаге сунчевог зрачења која пада на површ суда од  $500 \text{ W}/\text{m}^2$ . Компонента размене енергије зрачењем на унутрашњој страни зида се може занемарити.

Решење



На слици је приказана заменска шема са концентрисаним параметрима којим се моделују топлотни процеси у зиду суда трансформатора и на његовој површини. У граничном случају, уље се неће ни хладити ни загревати преко зида суда, односно површинска густина снаге којом уље размењује енергију са зидом суда биће једнака нули.

$$q_{ulja} = 0 \quad (19.1)$$

Пораст температуре суда у односу на амбијент се може израчунати као:

$$\theta = \theta_{ulja} + \left( \frac{1}{\alpha_{ulja}} + \frac{\delta/2}{\lambda} \right) \cdot q_{ulja} \quad (19.2)$$

Из (19.1) и (19.2) следи:

$$\theta = \theta_{ulja} = 40\text{K} \quad (19.3)$$

За пораст температуре спољашње површи суда се може написати:

$$\theta_{ss} = \frac{1}{\alpha_v} \cdot (P_\gamma + \varepsilon \cdot P_s - P_z) \quad (19.4)$$

$$\theta_{ss} = \theta - \frac{\delta/2}{\lambda} \cdot P_\gamma \approx \theta \quad (19.5)$$

Заменом  $\theta_{ss}$  из једначине (19.5) у једначину (19.4) се добија

$$P_\gamma = \alpha_v \cdot \theta_{ss} - \varepsilon \cdot P_s + P_z \quad (19.6)$$

Површинска густина снаге која се зрачењем размењује са амбијентом се може одредити на следећи начин:

$$P_z = \sigma_c \cdot \left( \left( \frac{273 + \vartheta_a + \theta_{ss}}{100} \right)^4 - \left( \frac{273 + \vartheta_a}{100} \right)^4 \right) \quad (19.7)$$

Заменом (19.7) у (19.6) и узимајући у обзир (19.5) добија се:



$$P_{\gamma} = \alpha_v \cdot \theta - \varepsilon \cdot P_s + \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot \left( \left( \frac{273 + g_a + \theta}{100} \right)^4 - \left( \frac{273 + g_a}{100} \right)^4 \right) \quad (19.8)$$

Заменом бројних вредности се добија у току дана:

$$P_{\gamma} = 125.51 \text{ W/m}^2 \quad (19.9)$$

а у току ноћи:

$$P_{\gamma} = 525.51 \text{ W/m}^2 \quad (19.10)$$

При површинским густинама снаге губитака услед расутог флукса већим од горе наведених, уље ће се грејати преко зида суда уместо да се хлади, што је изузетно лоше јер се систем предвиђен за хлађење активних делова трансформатора понаша супротно жељеном. Критичнији је дневни период због присуства сунчевог зрачења које загрева спољну површ суда трансформатора.

### **ЗАДАТАК 20**

Подаци о дистрибутивном енергетском уљном трансформатору: однос номиналних губитака услед оптерећења (у намотајима) и номиналних губитака у празном ходу (у језгру)  $P_{Cun} / P_{Fen} = 5$ , номинални пораст температуре горњег уља  $\theta_{gun} = 55 \text{ K}$ , пораст средње температуре намотаја у односу на средњу температуру уља  $g_n = 20 \text{ K}$ , фактор најтоплије тачке  $H = 1.1$ , временска константа по којој се приближно може рачунати временски ток промене температуре горњег уља 3 сата. Однос пораста температуре горњег уља и његове номиналне вредности ( $\theta_{gu} / \theta_{gun}$ ) је једнак количнику губитака и номиналних губитака ( $P_{gu} / P_{gun}$ ) степенованом на 0.8. Идентична зависност важи и за разлику средње температуре намотаја и средње температуре уља ( $g / g_n$ ), при чему је релевантан однос губитака у намотајима ( $P_{Cu} / P_{Cun}$ ). Колико износи константно максимално оптерећење у трајању од 1 сата ако су по укључењу трансформатора који се налази на температури  $-20^\circ\text{C}$ , граничне вредности за оптерећење трансформатора у оваквом нужном случају: максимално релативно струјно оптерећење 1.8, максимална температура најтоплије тачке  $150^\circ\text{C}$  и највиша температура горњег уља  $115^\circ\text{C}$ ?

#### *Решење*

Према поставци задатка, за однос разлике средњих температура намотаја и уља у стационарном стању и номиналне разлике средњих температура намотаја и уља важи релација:

$$\frac{g}{g_n} = \left( \frac{P_{Cu}}{P_{Cun}} \right)^{0.8} \quad (20.1)$$

Уколико је релативно струјно оптерећење трансформатора означено са  $\beta$ , тада важи следећа релација:

$$P_{Cu} = \beta^2 \cdot P_{Cun} \quad (20.2)$$

Заменом (20.2) у једначину (20.1) добија се:

$$\frac{g}{g_n} = \beta^{1.6} \quad (20.3)$$

$$g = \beta^{1.6} \cdot g_n \quad (20.4)$$

За однос пораста температуре горњег уља у стационарном стању и номиналног пораста температуре горњег уља према условима задатка важи релација:

$$\frac{\theta_{gu}}{\theta_{gun}} = \left( \frac{P_{Cu} + P_{Fen}}{P_{Cun} + P_{Fen}} \right)^{0.8} \quad (20.5)$$

Заменом једначине (20.2) у једначину (20.5) и уважавајући однос  $P_{Cun} / P_{Fen} = 5$ , добија се:

$$\frac{\theta_{gu}}{\theta_{gun}} = \left( \frac{\beta^2 \cdot P_{Cun} + \frac{1}{5} \cdot P_{Cun}}{P_{Cun} + \frac{1}{5} \cdot P_{Cun}} \right)^{0.8} \quad (20.6)$$

$$\frac{\theta_{gu}}{\theta_{gun}} = \left( \frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0.8} \quad (20.7)$$

Временска промена пораста температуре горњег уља се може апроксимативно приказати експоненцијалним функцијама, иако оне не описују тачан временски облик те промене, с обзиром да је систем нелинеаран, што се огледа пре свега у зависности коефицијента преласка топлоте струјањем на ваздух од пораста температуре уља.

За сваки од критеријума датих у поставци задатка, може се израчунати критично релативно струјно оптерећење трансформатора при коме се достижу дозвољени пораст карактеристичних температура.

Стварно критично струјно оптерећење једнако је минималној вредности добијеној при анализи свих критеријума.

Прво ће се израчунати релативно струјно оптерећење при коме температура горњег уља достиже максималну дозвољену вредност. Промена температуре горњег уља дата је са:

$$\mathcal{G}_{gu}(t) = \mathcal{G}_a + \theta_{gu}(t) \quad (20.8)$$

где је  $\mathcal{G}_a$  температура амбијента. Одговарајућа временска промена пораста температуре горњег уља при скоковитој промени оптерећења је:

$$\theta_{gu}(t) = \theta_{gu}(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_u}} + \theta_{gu} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_u}} \right) \quad (20.9)$$

где је  $T_u$  термичка временска константа за уље, а  $\theta_{gu}$  је пораст температуре горњег уља у стационарном стању. Заменом (20.7) у (20.9) и имајући у виду да је почетна вредност пораста температуре горњег уља једнака нули (трансформатор је довољно дуго био искључен) се добија:

$$\theta_{gu}(t) = \theta_{gun} \cdot \left( \frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0.8} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_u}} \right) \quad (20.10)$$

Након 1h од укључења, при критичном релативном струјном оптерећењу, достиже се максимална дозвољена температура горњег уља:

$$\mathcal{G}_{gu}(1h) = \mathcal{G}_{gu \max} \quad (20.11)$$

Заменом (20.10) и (20.8) у (20.11) се добија једначина из које се може израчунати критично струјно оптерећење:

$$\mathcal{G}_{gu}(1h) = \mathcal{G}_{gu\max} = \mathcal{G}_a + \theta_{gu} \cdot \left( \frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0.8} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{1h}{T_u}} \right) \quad (20.12)$$

одакле се добија

$$\beta = 4.198 \quad (20.13)$$

При разматрању температуре најтоплије тачке, уводе се следеће апроксимације. Пошто је временска константа која описује промене пораста температуре намотаја у односу на уље неколико пута мања од периода који се посматра, сматра се да је након 1h већ успостављена стационарна вредност промене пораста температуре намотаја у односу на уље.

$$g(1h) = g \quad (20.14)$$

Температура најтоплије тачке се израчунава према формули:

$$\mathcal{G}_{hs}(t) = \mathcal{G}_a + \theta_{gu}(t) + H \cdot g(t) \quad (20.15)$$

$$\mathcal{G}_{hs}(t) = \mathcal{G}_a + \theta_{gu} \cdot \left( \frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0.8} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_u}} \right) + H \cdot \beta^{1.6} \cdot g_n \quad (20.16)$$

$$\mathcal{G}_{hs}(1h) = \mathcal{G}_{hs\max} = \mathcal{G}_a + \theta_{gu} \cdot \left( \frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0.8} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{1h}{T_u}} \right) + H \cdot \beta^{1.6} \cdot g_n \quad (20.17)$$

из чега се израчунава

$$\beta = 2.648 \quad (20.18)$$

Види се да је у овом случају најкритичнији услов да релативно струјно оптерећење не сме да пређе 1.8.

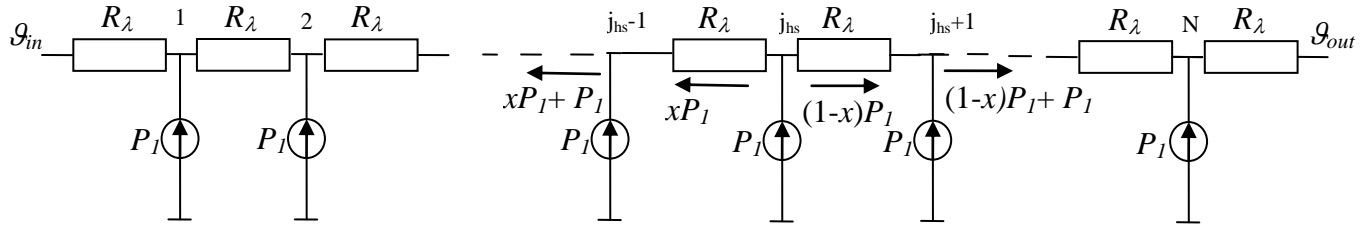
$$\beta_{kr} = 1.8 \quad (20.19)$$

## **ЗАДАТАК 21**

Израчунати најтоплију тачку намотаја сувог електроенергетског трансформатора који се хлади ваздухом температуре 20°C, симетрично на унутрашњој и спољној површи, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем са површи на ваздух износи  $\alpha_k = 6 \text{ W / m}^2 \text{ K}$ . Висина намотаја је  $H = 0.75 \text{ m}$ , а унутрашњи пречник  $D_u = 363 \text{ mm}$ . Намотај је фолијског типа и има  $N = 119$  навојака, сваки висине једнаке висини намотаја; дебљина изолације између навојака износи  $\delta_i = 0.046 \text{ mm}$ , специфична топлотна проводност изолације  $\lambda_i = 0.15 \text{ W / m K}$ , ширина проводника (алуминијум)  $\delta_{Al} = 0.2 \text{ mm}$ . Губици у једном навојку износе  $P_{\gamma l} = 10 \text{ W}$ . При решавању задатка сматрати да је отпор преносу топлоте провођењем кроз слојеве изолације исти, односно израчунавати га као отпор провођењу топлоте кроз раван зид површи  $(\pi (D_u + N \delta_{Al} + (N + 1) \delta_i)) H$  и дебљине  $\delta_i$ . Сматрати и да су отпори преласку топлоте струјањем на унутрашњој и спољашњој површи намотаја исти. Слој изолације постоји и на унутрашњој страни кроз унутрашњег навојка и на спољној страни кроз спољашњег навојка. Збир првих  $n$  чланова аритметичког реда (први елемент реда  $a_1$ , разлика два суседна члана реда  $d$ ) износи  $n a_1 + (n(n - 1))/2 d$ .

### Решење

Општа шема, која важи за несиметричне услове хлађења:



У условима симетричног хлађења,  $G_{in} = G_{out}$ ,  $j_{hs} = 60$ .

Кроз сваку од граничних површи енергија се преноси према ваздуху снагом

$$P_{\alpha} = 59.5 \cdot 10 \text{ W} = 595 \text{ W}. \quad (21.1)$$

Површ меродавна за израчунавање топлотних отпора преносу топлоте провођењем и струјањем износи

$$S = \pi D_{sr} H = (\pi (D_u + N \delta_{Al} + (N + 1) \delta_i)) H = 0.9244 \text{ m}^2 \quad (21.2)$$

Топлотни отпор преносу топлоте провођењем један слој изолације износи

$$R_{\lambda} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\delta_i}{S} = \frac{1}{0.15} \frac{0.046}{0.9241} = 0.33175 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{W}} \quad (21.3)$$

Топлотни отпор преносу топлоте струјањем износи

$$R_{\alpha} = \frac{1}{\alpha S} = \frac{1}{6 \cdot 0.9244} = 180.3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{W}} \quad (21.4)$$

Температура граничних површи износи

$$G_{in} = G_{out} = 20^{\circ}\text{C} + P_{\alpha} R_{\alpha} = 20^{\circ}\text{C} + 595 \cdot 180.3 \cdot 10^{-3} = 127.3^{\circ}\text{C} \quad (21.5)$$

На основу топлотне шеме, и узимајући у обзир симетрију (најтоплији је 60-ти навојак и половина снаге губитака у њему се преноси ка унутрашњој, а половина ка спољашњој површи намотаја; коефицијент  $x$  који се појављује у наредним изразима има вредност 0.5) могу се написати следећи изрази:

$$G_{hs} - G_{in} = \sum_{i=1}^{j_{hs}} R_{\lambda} P_i \quad (21.6)$$

На основу еквивалентне шеме се могу дефинисати снаге преноса топлоте на свакој од деоница ( $P_i$ ), после чега претходни израз постаје

$$G_{hs} - G_{in} = R(x P_1 + (x P_1 + P_1) + (x P_1 + 2 P_1) + \dots + (x P_1 + (j_{hs} - 1) P_1)) \quad (21.7)$$

односно

$$G_{hs} = G_{in} + R \left( x j_{hs} P_1 + P_1 \sum_{i=1}^{j_{hs}-1} i \right) \quad (21.8)$$

$$G_{hs} = G_{in} + R P_1 \left( x j_{hs} + \frac{j_{hs}(j_{hs}-1)}{2} \right) = 127.3 + 0.33175 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \left( 0.5 \cdot 60 + \frac{60 \cdot 59}{2} \right) = 133.3^{\circ}\text{C} \quad (21.9)$$