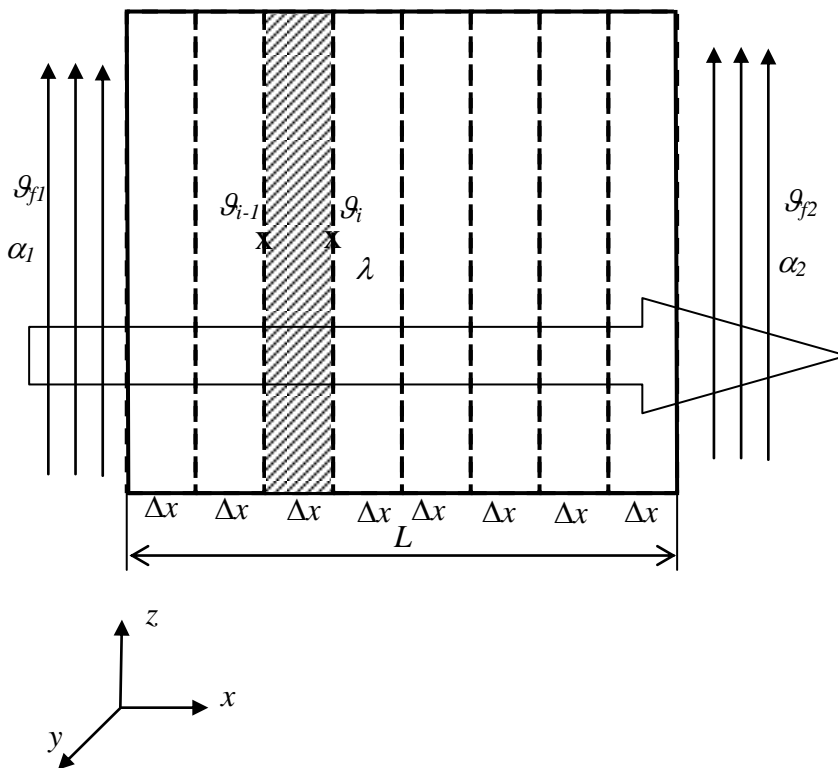


5.2.1. Једначине написане на основу поделе топлопроводне средине на мали број изотермичких делова

Јасно је да свака подела топлопроводне средине не делове као последицу има смањење градијента температуре у сваком од делова (у односу на укупни градијент) – тиме је оправданија претпоставка да делови представљају изотермичке запремине. Примера ради, посматрајмо једнодимензиони пренос топлоте кроз раван зид дебљине L , направљен од материјала специфичне топлотне проводности λ , који се са једне стране загрева флуидом температуре ϑ_{f1} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем са флуида на зид α_1 , а са друге стране се хлади флуидом температуре ϑ_{f2} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем са зида на флуид α_2 .



Слика 27

$$\vartheta = f(x, t) = \text{const.}(y, z)$$

За зид подељен на n једнаких делова (на примеру приказаном на слици $n = 8$) отпор преносу топлоте кроз један део зида (ширина једног дела зида $\Delta x = L / n$) износи

$$R_{\lambda 1}^r = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{S} \tag{113}$$

Пад температуре, услед преноса топлоте провођењем, на једном делу зида, исказан преко укупне разлике температура у процесу преноса топлоте са флуида температуре ϑ_{f1} на флуид температуре ϑ_{f2} , износи

$$\Delta \vartheta_{\lambda 1} = (\vartheta_{i-1} - \vartheta_i) = (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{S}}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} + \frac{1}{\alpha_2 S}} = \frac{1}{n} (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (114)$$

Дакле, што је већи број делова на које је подељен зид, односно што је мања дебљина једног дела зида, то је мањи пад температуре на њему у односу на укупни пад температуре $\frac{(\vartheta_{i-1} - \vartheta_i)}{(\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2})}$,

односно то је оправданија претпоставка да део зида представља изотермичку запремину. Прихватљивост претпоставке о томе да је температура по запремини дела константна се може исказати и користећи и приступ преко *Biot*-овог броја дефинисаног као однос топлотног отпора преносу топлоте кроз један део вољка у односу на збирни преостали топлотни отпор преласку

топлоте са флуида 1 на флуид 2:
$$B_i = \frac{\frac{1}{\lambda} \frac{L/n}{S}}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{\lambda} \frac{(n-1)L/n}{S} + \frac{1}{\alpha_2 S}} < 0.1.$$

Кад се топлопроводна средина „издели“ (дискретизује), за сваки од делова се пише једначина енергетског биланса, практично у складу са објашњењем из 2.1.1. (енергетски биланс за затворен систем) и 2.1.3. (енергетски биланс на граничној површи).

Граничне површи делова, на којима се дефинишу гранични услови на сваком од делова, могу бити ка другом делу топлопроводне средине (у примеру са претходне слике постоји 6 унутрашњих делова овога типа) или ка околини (у примеру са претходне слике постоје 2 површи овог типа, једна према флуиду температуре ϑ_{f1} и једна ка флуиду температуре ϑ_{f2}).

Ако је површ према другом делу топлопроводне средине (координата $x=0$), гранични услов је типа 6. (видети уводни део у поглавље 5.): $-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t}$; градијент температуре

се израчунава као прираштај температуре у дискретизованим моделу, као разлика температура доступних у моделу. Ако се са ϑ_{2l} означи температура на граничној површи између делова 1 и 2, са ϑ_1 температура на средини дела 1 и са ϑ_2 температура на средини дела 2, градијент температуре у делу лево од граничне површи, чија је дебљина L_1 износи

$-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = \lambda_1 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{12}}{L_1/2}$, а градијент температуре у делу десно од граничне површи, чија је

дебљина L_2 износи $-\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t} = \lambda_2 \frac{\vartheta_{12} - \vartheta_2}{L_2/2}$ (напомена: у разматраном случају, да се посматра

гранична површ између делова 1 и 2 хомогеног зида, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Пренос топлоте провођењем од левог дела ка граничној површи се може приказати топлотним отпором, одређеним као

количник разлике температура $\vartheta_1 - \vartheta_{12}$ и снаге преноса топлоте, $R_{\lambda 1}^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S}$; аналогно,

топлотни отпор провођењу топлоте од граничне површи једнак је количнику разлике

температура $\vartheta_{12} - \vartheta_2$ и снаге преноса топлоте $R_{\lambda 2}^T = \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S}$. Ова два топлотна отпора су везана

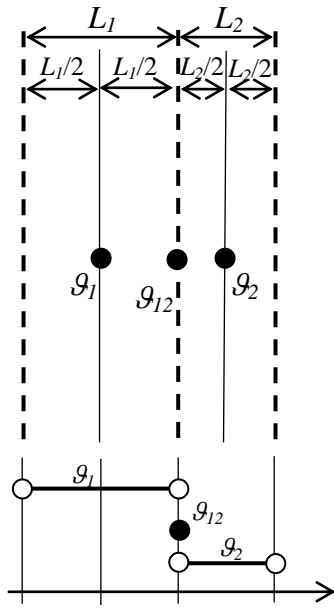
на ред, тако да је топлотни отпор између средишних тачака суседних делова топлопроводне средине (слика 28)

$$R^T = R_{\lambda 1}^T + R_{\lambda 2}^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S} \quad (115)$$

Снага којом се енергија од дела 1 преноси у део 2 размењује између ова два дела једнака је

$$P_{iz1} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S}} \quad (116)$$

Интересантно је сагледати какав профил температуре одговара приближној представи да су запремине на које је подељена топлопроводна средина изотермичке, а да је отпор преносу топлоте између њих зависан од топлотног отпора провођењу топлоте између средишњих тачака запремина. Скица два суседна дела зида и профил температуре су приказани на следећој слици.



Слика 28

$$g_{12} = g_1 - \frac{g_1 - g_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{2}} \frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} \tag{117}$$

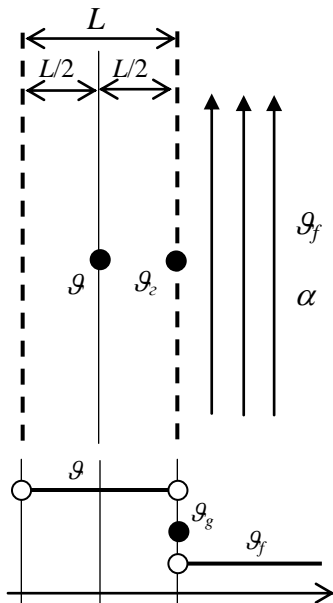
Ако је површ према околина, гранични услов је један од типова 1. – 5.; као пример представе преко топлотног отпора (аналогно претходном) приказаће се гранични услов типа 4.; као и у претходном случају, посматраће се једнодимензиони пренос топлоте. Топлотни отпор између средишње тачке дела зида дужине L који се налази уз граничну површ која се хлади струјањем флуида температуре g_f (при чему коефицијент преласка топлоте струјањем са површи на флуид износи α) је одређен изразом

$$R^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S} \tag{118}$$

Снага којом се енергија од дела зида предаје флуиду једнака је

$$P_{izl} = \frac{g - g_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} \tag{119}$$

Скица дела зида и суседног флуида, као и профил температуре који одговара усвојеном моделу, приказани су на следећој слици.



Слика 29

$$\theta_g = \theta - \frac{\theta - \theta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (120)$$

На претходна два примера дата је илустрација како је потребно описати размену енергије кроз сваку од граничних површи које „затварају“ сваку од изотермичких запремина. Укупна снага размене енергије изотермичких запремина са околином је једнака збиру снага размене енергије кроз сваку од граничних површина.

На овај начин је постављен модел за одређивање снаге којом посматрани део размењује са околином (P_{izl}). Снага генерисања топлоте (P_g), као следећа компонента енергетског биланса посматраног дела одређује се интеграцијом снаге генерисања топлоте по запремини посматраног дела. Последња компонента, којом се „затвора математички модел“, је снага којом се енергија акумулише у запремини посматраног дела (P_{ak}). Полазећи од претпоставке да део запремине V има константну температуру (θ), она је једнака $\rho c_p V \frac{d\theta}{dt}$ (густина материјала топлопроводне средине је ρ , а специфични топлотни капацитет c_p).

Дакле, за елемент код кога је снага кроз једну граничну површ одређена изразом (116), а кроз другу износи P_{izl2} , комплетна једначина енергетског биланса гласи

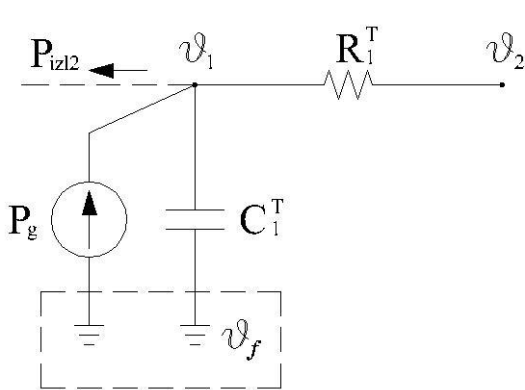
$$P_g = \rho c_p V \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{2}} + P_{izl2} \quad (121)$$

За елемент код кога је снага кроз једну граничну површ одређена изразом (119), а кроз другу износи P_{izl2} , комплетна једначина енергетског биланса гласи

$$P_g = \rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta - \vartheta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} + P_{izl2} \quad (122)$$

Ово је била основа на којој „се граде“ многе од метода које ће се изложити у наставку предавања.

Корак даље у представи термичких процеса је увођење еквивалентних топлотних шема, што је форма која је посебно погодна за електроинжењере и студенте електротехнике. Примера ради, на наредне две слике су приказани елементи топлотне шеме који одговарају претходно изнетим примерима, односно једначинама (121) и (122).

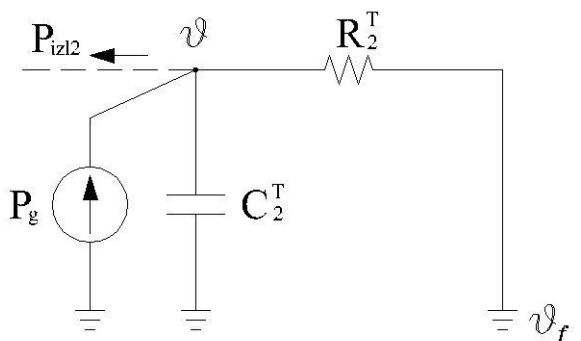


Слика 30

$$R_1^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{2} \quad (123)$$

$$C_1^T = \rho c_p L_1 S \quad (124)$$

P_g представља снагу генерисања топлоте у запремини $L_1 S$



Слика 31

$$R_2^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S} \quad (125)$$

$$C_2^T = \rho c_p L S \quad (126)$$

P_g представља снагу генерисања топлоте у запремини $L S$

За елемент топлотне шеме са слике 31 (за случај да је температура флуида \mathcal{G}_f константна) се коришћењем истих принципа као у теорији кола може написати једначина:

$$P_g = C_2^T \frac{d(\mathcal{G} - \mathcal{G}_f)}{dt} + P_{izl2} + \frac{\mathcal{G} - \mathcal{G}_f}{R_2^T} \quad (127)$$

$$P_g = \rho c_p L S \frac{d(\mathcal{G} - \mathcal{G}_f)}{dt} + P_{izl2} + \frac{\mathcal{G} - \mathcal{G}_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (128)$$

Уколико се за пораст температуре у односу на референтну температуру (\mathcal{G}_f) уведе ознака $\theta = \mathcal{G} - \mathcal{G}_f$ (што је погодно када је \mathcal{G}_f константна), претходна једначина постаје

$$P_g = \rho c_p L S \frac{d\theta}{dt} + P_{izl2} + \frac{\theta}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (129)$$

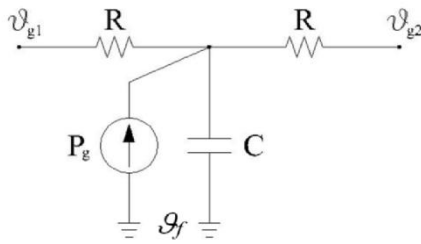
Аналогно, за елемент топлотне шеме са слике 30 има се

$$P_g = \rho c_p L_1 S \frac{d\theta_1}{dt} + P_{izl2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{2}} \quad (130)$$

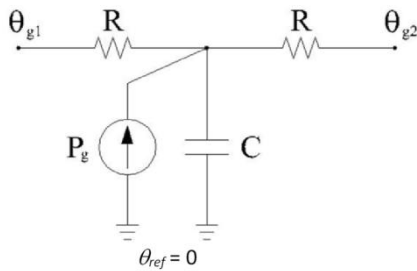
Види се да једначине написане за топлотне шеме, по методологији која се примењује у теорији електричних кола, одговарају изразима енергетских биланса (121) и (122). За разлику од електричних кола, код којих је референтни потенцијал, који одговара температури \mathcal{G}_f , константан, у топлотним системима температура \mathcal{G}_f не мора бити константна, односно често и није константна – на пример, температура ваздуха у просторији у којој се налази трансформатор, а који хлади спољашње површи трансформатора (суд и радијаторе), је виша од температуре ван просторије и зависи од снаге преноса топлоте од трансформатора ка ваздуху у просторији. У овом случају није могуће формирати топлотну шему трансформатора са референтним чвором на температури ваздуха у просторији, већ се мора применити једначина базирана на принципу који је исти као код једначине (122).

Поступак увођења топлотних шема се базирао на основним једначинама температурног поља и дискретизацији топлопроводне средине. На основу претходно изложеног једноставним расуђивањем може се доћи до модела дела кроз којих се врши једнодимензиони пренос топлоте кроз део који се посматра као изотермички део. Модел је приказан на наредне две слике

(температуре у чворовима су температуре граничних површи и температура запремине дела); на слици 32 чворовима су додељене температуре – референтни чвор је на температури флуида, а на слици 33 пораст – референтни чвор је на вредности нула.

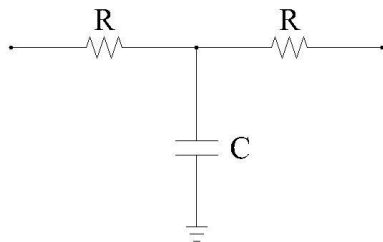


Слика 32



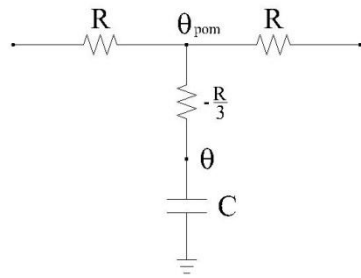
Слика 33

Уколико по запремини не постоји генерисање топлоте, шема се своди на следећу.



Слика 34

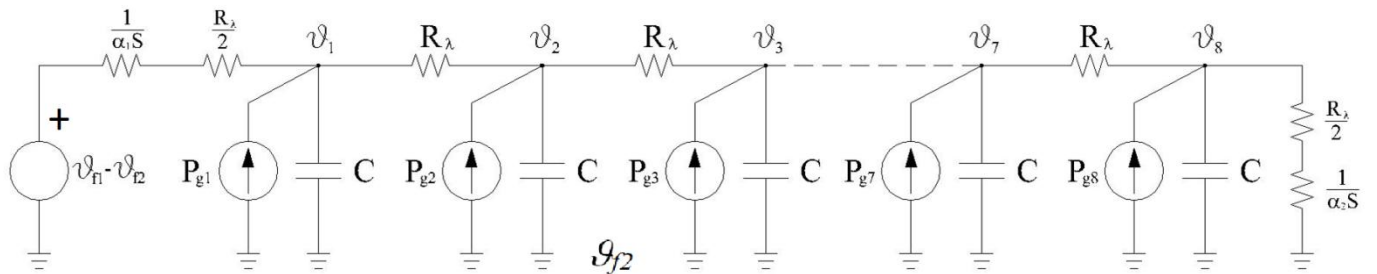
У литератури постоје и „софистициранији“ модели. Као што је већ објашњено, претходно коришћени модели се базирају на претпоставци да је температура по запремини константна, а да се размена енергије кроз део одвија као провођење топлоте од средишње тачке дела. Полазећи од тога да је извод температуре, а не температура, константан по запремини, долази се до модела дела приказаног на следећој слици. Овакав модел је прецизнији и његова примена доводи до тачнијих резултата при моделовању преноса топлоте кроз тело: за добијање резултата исте тачности, потребно је применити мање оваквих делова (подела средине се може извршити на мањи број делова), односно за исти број делова – за исту поделу – добијају се тачнији резултати. θ је пораст средње температуре посматраног дела, а θ_{rom} помоћна величина која нема физичко објашњење, а настала је као помоћна променљива у спроведеном математичком поступку.



Слика 35

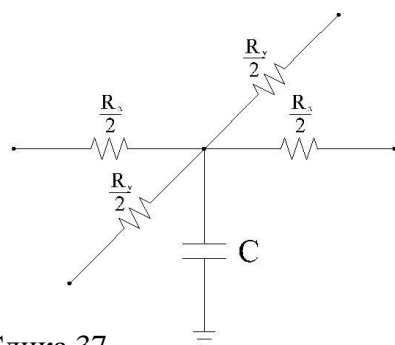
Посматрајмо сада раван зид по чијој се запремини генерише топлота и који се са леве стране загрева струјањем флуида температуре ϑ_{f1} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем α_1 , а са десне стране хлади струјањем флуида температуре ϑ_{f2} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем α_2 . Топлотна шема којом се описује овај систем, односно нестационарни једнодимензиони пренос топлоте кроз зид, приказан је на слици 36. Као референтна температура је узета температура хладнијег флуида ϑ_{f2} . Део топлотне шеме који описује загревање левог базиса

ваљка одговара следећем изразу за снагу загревања $P_{zagr} = \frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha_1 S}}$.

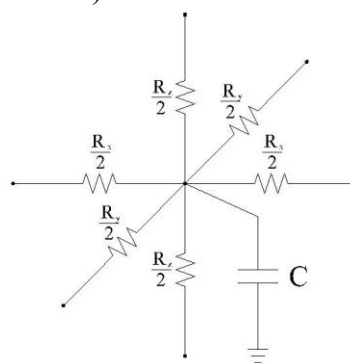


Слика 36

Коначно, на следеће две слике су приказани модели за случај дводимензионалног, односно тродимензионалног преноса топлоте у правоугаоном (*Descartes*-ом) координатном систему (случај када не постоји генерисање топлоте по запремини).



Слика 37



Слика 38

Топлотне шеме се могу применити и у случајевима када се топлотни систем састоји од више тела, сачињених од различитих материјала (такав случај је већ помињан у претходном тексту – једначина (115)). Примера ради, ако би делови дужина L_1 и L_2 на слици 28 припадали различитим телима (зидовима), сачињених од материјала топлотне проводности λ_1 и λ_2 , респективно, топлотни отпор између средишта ова два дела би износио

$$R^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S} \quad (131)$$

У електроенергетици су чести системи у којима су поједина тела у топлотном систему направљена од материјала много веће топлотне проводности него друга тела: на пример, кабл – једно хомогено тело представља електропроводни део (бакар или алуминијум), а друго хомогено тело електрична изолација. У топлотној шеми електропроводни део се може (без практичног смањења прецизности модела) приказати као топлотни капацитет, а изолација као топлотни отпор. Другим речима, због односа параметара електропроводног и изолационог материјала, за електропроводни део се може сматрати да представља изотермичку запремину, а за електроизолациони део се може занемарити акумулисање топлоте у њему. Генерисање топлоте је доминантно у електропроводном делу, односно у топлотној шеми паралелно са топлотним капацитетом се прикључује генератор снаге.

Коначно, топлотне шеме се могу применити и за стационарне топлотне режиме, на начин потпуно аналоган претходно изложеном: у претходно описаним моделима се само „изостави кондензатор“. Скуп једначина који одговара таквим топлотним шемама представља скуп алгебарских једначина (за разлику од скупа диференцијалних једначина, којима се описују прелазни топлотни процеси).

5.2.1.1. Аналитичко решавање скупа алгебарских (за стационарне топлотне режиме) или диференцијалних (за прелазне топлотне процесе) једначина

Као што је већ речено, предност оваквог начина решавања је добијање експлицитних аналитичких израза просторне / временске расподеле температуре. Реално се може применити само за мали број једначина, односно грубу поделу топлопроводне средине и за мали број тела који сачињавају топлотни систем. Друго реално ограничење је да је материјална средина линеарна, као и да су гранични услови линеарни, односно да је пренос топлоте са граничних површи пропорционалан разлици температура граничне површи и температуре флуида (другим речима, елементи топлотне шеме не могу да зависе од температуре). Такви примери су приказани у задацима 35-37 у Збирци

задатака; такође и у задацима 31-34 (задатак 33. је већ поменут на предавањима – часови 10 до 12 – Слика 25).

Ако кренемо од тога да је први корак који смо учинили представа топлотног система преко јединствене топлотне шеме, корак који следи је писање система диференцијалних / алгебарских једначина који одговара топлотној шеми. Једначине је најпогодније писати по методи аналогној методи потенцијала чворова. Примера ради, навешће се скуп од 8 једначина (број једначина је једнак броју чворова, односно броју кондензатора) који одговара слици 36 (овај систем је превелики да би се решавао аналитички). Ако са θ означимо разлику температуре \mathcal{S} и температуре хладног флуида \mathcal{S}_2 (референтној тачки топлотне шеме одговара температура \mathcal{S}_2) систем једначина гласи:

$$C \frac{d\theta_1}{dt} = P_{g1} + \frac{\theta_{f1} - \theta_1}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{R_\lambda}{2}} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_\lambda} \quad (132)$$

$$C \frac{d\theta_2}{dt} = P_{g2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_\lambda} - \frac{\theta_2 - \theta_3}{R_\lambda} \quad (133)$$

$$C \frac{d\theta_3}{dt} = P_{g3} + \frac{\theta_2 - \theta_3}{R_\lambda} - \frac{\theta_3 - \theta_4}{R_\lambda} \quad (134)$$

$$C \frac{d\theta_4}{dt} = P_{g4} + \frac{\theta_3 - \theta_4}{R_\lambda} - \frac{\theta_4 - \theta_5}{R_\lambda} \quad (135)$$

$$C \frac{d\theta_5}{dt} = P_{g5} + \frac{\theta_4 - \theta_5}{R_\lambda} - \frac{\theta_5 - \theta_6}{R_\lambda} \quad (136)$$

$$C \frac{d\theta_6}{dt} = P_{g6} + \frac{\theta_5 - \theta_6}{R_\lambda} - \frac{\theta_6 - \theta_7}{R_\lambda} \quad (137)$$

$$C \frac{d\theta_7}{dt} = P_{g7} + \frac{\theta_6 - \theta_7}{R_\lambda} - \frac{\theta_7 - \theta_8}{R_\lambda} \quad (138)$$

$$C \frac{d\theta_8}{dt} = P_{g8} + \frac{\theta_7 - \theta_8}{R_\lambda} - \frac{\theta_8}{\frac{R_\lambda}{2} + \frac{1}{\alpha_2 S}} \quad (139)$$

5.2.1.2. Решавање система алгебарских или диференцијалних једначина применом нумеричких метода – коришћење математичких библиотека програма у оквиру програма написаних у „класичним“ програмским језицима

Као што је већ дискутовано, овакав приступ јесте од интереса када се развијају софтвер за термичко пројектовање електроенергетске опреме, а за већину студената је важнији савладавање приступа који се објашњава у одељку 5.2.1.3.

5.2.1.3. Решавање система алгебарских или диференцијалних једначина применом наменских симулационих програма

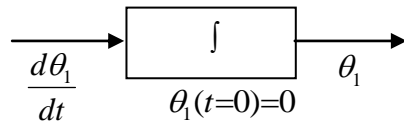
Постављање и решавање система алгебарских једначина се може једноставно решити применом неког од актуелних софтверских алата, као што су *Mathcad* (погодно за мање системе једначина) или *Matlab* (погодно за веће системе једначина).

Симулациони рачунарски програми у суштини представљају рачунарске програме намењене решавању система диференцијалних једначина који описују различите врсте физичких процеса. По правилу једначине се пишу у простору стања: са леве стране једначине фигурише вектор извода променљивих стања, а са десне вектор променљиве стања (x) и вектор улазне променљиве (u), помножени са преносним матрицама A и B ($\dot{x} = Ax + Bu$). Форма у простору стања се користи због тога што је из ње једноставно формирати блок дијаграме, који су погодна форма за унос у рачунар – у савременим симулационим програмима, као што је *Simulink*, у улазном едитору се директно црта блок дијаграм, док је у старијим варијантама симулационих програма који су радили под DOS оперативним системом (DOS верзија *Tutsim*-а, на пример) за сваки блок постојала мнемоничка ознака, па се блок дијаграм уносио преко едитора текста.

Пример формирања блок-дијаграма ће се дати за једначину (132). Посматраће се случај да је температура читаве запремине у тренутку $t = 0$ била једнака температури хладног флуида (θ_{f2}), односно да је у почетном тренутку разлика температура сваког од делова зида и температуре хладног флуида била једнака нули ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$). У простору стања једначина (132) гласи

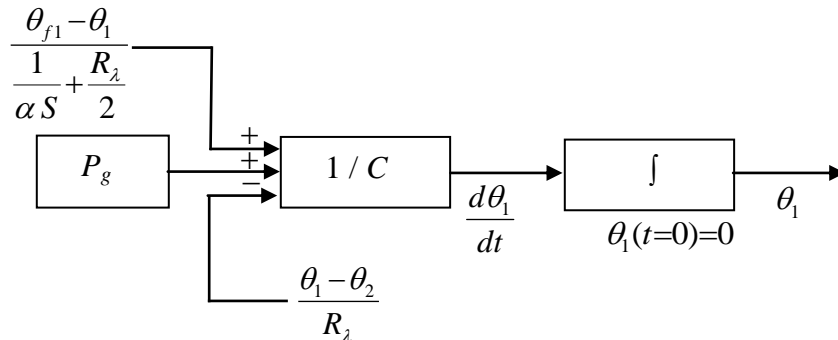
$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{1}{C} \left(P_{g1} + \frac{\theta_{f1} - \theta_1}{\frac{1}{\alpha S} + \frac{R_\lambda}{2}} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_\lambda} \right) \quad (140)$$

Цртање блок дијаграма је логично започети од блока интеграције: разлика температура θ_1 се добија интеграцијом њеног извода ($d\theta_1 / dt$); почетни услов за интегратор је $\theta_1(t=0) = 0$:



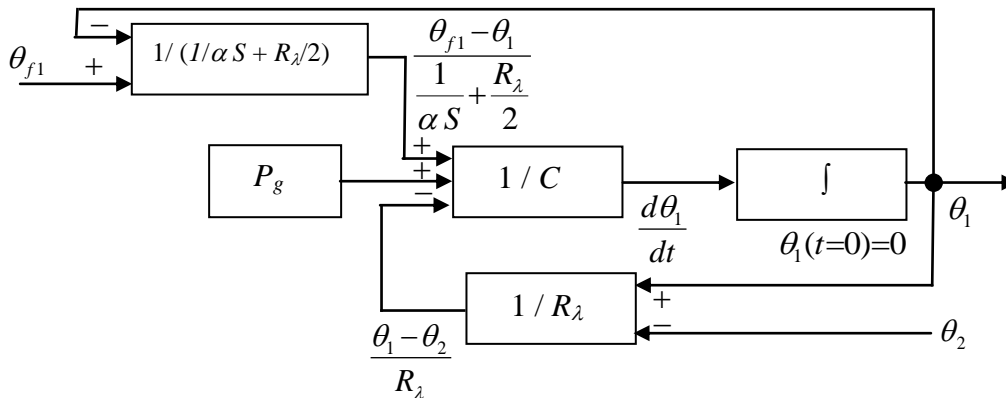
Слика 39

Вредност извода је једнака суми три члана, од којих је један улазна величина (P_g), подељеној са топлотним капацитетом (константом) C :



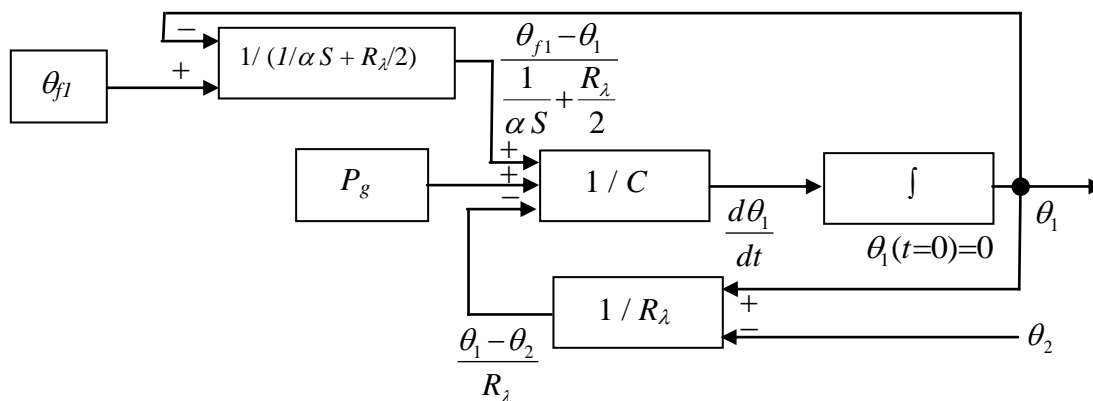
Слика 40

Следећи логичан корак:



Слика 41

Коначно, имајући у виду да је θ_{f1} улазна величина, долази се до



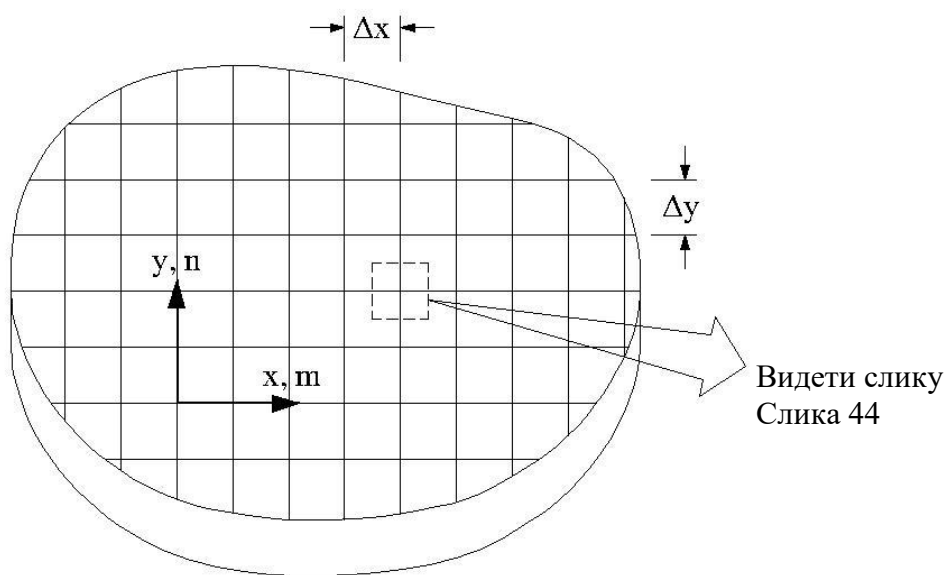
Слика 42

Све се „уклопило“, осим вредности θ_2 , али и она би се „уклопила“ када би се нацртао блок-дијаграм за други елемент. По цртању блок-дијаграма за сваки елемент, аналогно принципу изложеном у претходном примеру, не би остала ни једна „неповезана грана“.

Израда симулационог програма за један топлотни систем је садржај једне од лабораторијских вежби. Свака група од по два до три студента ће добити посебан задатак, за који ће написати и пустити симулациони програм у *Simulink*-у. Студентима је на сајту предмета доступан један урађен пример, сличан ономе који треба да ураде.

5.2.2. Решавање једначина написаних на основу поделе топлопроводне средине на велики број делова

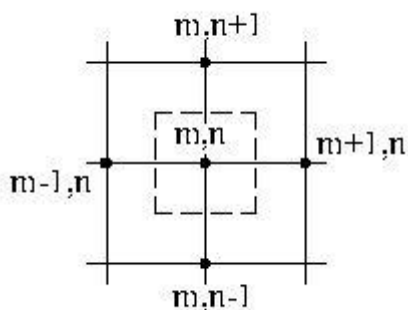
У овом одељку ће се изложити метода коначних разлика: математички поступак одређивања вредности температуре у коначном броју тачака и то у коначном броју временских тренутака. Први корак је одређивање броја и позиција тачака и усвајање скупа тренутака у којима се температуре у тим тачкама рачунају (практично, усвајање корака просторне и временске дискретизације). Видеће се да код примене појединих математичких поступака постоје ограничења у избору корака просторне и временске дискретизације. Пример поделе топлопроводне средине на делове је приказан на слици 43.



Слика 43

Слично као код поступка који је изложен када се дискутовало решавање топлотних проблема базирано на подели топлопроводне средине на мали број делова (поглавље 5.2.1), и овде се сматра да једна тачка репрезентује једну област, односно да је температура области једнака температури у тој тачки. Исти је и принцип да се посматра енергетски биланс (генерисана топлота у области, акумулисана топлота у области и размена топлоте са околним деловима : $Q_g = Q_{ak} + Q_{izl}$). Једина разлика је у томе што се акумулисана топлота, уместо у форми првог извода функције температуре у времену ($d\mathcal{Q}(x, y, z, t) / dt$), исказује преко коначног прираштаја у дефинисаном временском кораку дискретизације. Коначни прираштај у дефинисаном временском кораку се може исказати на два начина, при чему избор једног или другог има значајне последице на математичке методе за решавање система једначина. Прва могућност је да се извод температуре исказе као разлика температуре у текућем и температуре у претходном тренутку, подељена са кораком временске дискретизације (на даље ће се сматрати да је корак временске дискретизације константан). Друга могућност је да се извод температуре исказе преко разлике температуре у следећем и температуре у текућем тренутку.

Да би се објаснила метода, посматраће се **двострумензионални пренос топлоте** у правоугаоном координатном систему, **без запреминског генерисања топлоте**, при чему су кораци дискретизације како по x координати (Δx), тако и по y координати (Δy), константни. На слици 44 је приказан један елемент топлопроводне средине (m, n) који репрезентује област означену испрекиданим квадратом, са све четири стране окружен другим елементима топлопроводне средине – растојање тачака $m - 1$ и m , односно m и $m + 1$, је Δx , а тачака $n - 1$ и n , односно n и $n + 1$, је Δy .



Слика 44

Једначина енергетског биланса, за извод температуре исказан преко разлике температура у следећем ($p+1$) и у текућем (p) тренутку, гласи (l представља координату по димензији управној на раван, по којој се температура не мења):

$$0 = \rho c_p \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \Delta x \Delta y l - \lambda \Delta y l \frac{\vartheta_{m-1,n}^p - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta x} + \lambda \Delta y l \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m+1,n}^p}{\Delta x} - \lambda \Delta x l \frac{\vartheta_{m,n-1}^p - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta y} + \lambda \Delta x l \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n+1}^p}{\Delta y} \quad (141)$$

$$\rho c_p \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \lambda \frac{\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p - 2\vartheta_{m,n}^p}{\Delta x^2} + \lambda \frac{\vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p - 2\vartheta_{m,n}^p}{\Delta y^2} \quad (142)$$

У случају када је $\Delta x = \Delta y$ (ова претпоставка не утиче на суштинско разумевање методе, а уводи се ради скраћивања записа), претходни израз (уз увођење ознаке $a = \lambda / \rho c_p$) постаје

$$\frac{1}{a} \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p - 4\vartheta_{m,n}^p}{\Delta x^2} \quad (143)$$

Једноставном трансформацијом се долази до

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo (\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p) + (1 - 4Fo) \vartheta_{m,n}^p \quad (144)$$

где је Fo *Fourier*-ов број, $Fo = a \Delta t / \Delta x^2$.

У случају једнодимензионог преноса топлоте, једначина која одговара једначини (144) гласи

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo (\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p) + (1 - 2Fo) \vartheta_{m,n}^p \quad (145)$$

Ако се извод температуре искаже преко разлике температура у текућем ($p+1$) у односу на претходни (p) тренутак, једначина која одговара једначини (143) гласи:

$$\frac{1}{a} \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} - 4\vartheta_{m,n}^{p+1}}{\Delta x^2} \quad (146)$$

Одатле се може написати

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p = Fo (\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} - 4\vartheta_{m,n}^{p+1}) \quad (147)$$

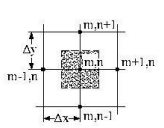
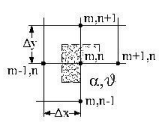
$$(1 + 4Fo) \vartheta_{m,n}^{p+1} - Fo (\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1}) = \vartheta_{m,n}^p \quad (148)$$

Постоји суштинска разлика између једначина (144) и (148).

Ако се крене од почетног тренутка, у коме су као почетни услов познате температуре у свим тачкама, применом израза (144) могу се једноставно одредити њихове вредности у сваком од наредних тренутака (најпре у тренутку Δt , потом у тренутку $2 \Delta t$, па у $3 \Delta t$ и тако даље; постоје експлицитни изрази за температуру у сваком од наредних тренутака, због чега се метода заснована на разлици температура у следећем у односу на текући тренутак назива *експлицитна метода*).

Израз (148) садржи 4 променљиве – из претходног тренутка фигурише само једна променљива – $\vartheta_{m,n}^p$; да би се одредиле температуре у сваком од тренутака после нултог, потребно је решити систем једначина – број једначина једнак је броју чворова. За решавање система једначина се користи инверзија матрице или нека од нумеричких метода – често коришћени метод је *Gauss-Seidel*-ов итеративни метод. Метода заснована на разлици температура у текућем у односу на претходни тренутак се назива *имплицитна метода*. На први поглед „праволинијска природа“ експлицитне методе делује као природнија и боља, односно први је утисак да је израчунавање засновано на њој „засигурно“ брже. Међутим, да би поступак експлицитне методе конвергирао, мора бити испуњен услов да је коефицијент уз температуру $\vartheta_{m,n}^p$ позитиван; дакле, $(1 - 4 Fo) \geq 0$, што диктира услов за *Fourier*-ов број $Fo \leq 1/4$, чиме се, за усвојени корак просторне дискретизације Δx^* , практично диктира корак временске дискретизације – он мора да буде мањи од $\Delta t^* \leq (1/4) \Delta x^{*2} / a$. Код имплицитне методе конвергенција не зависи од величине временског корака, односно температура се може израчунавати у произвољном броју корака, па се може догоди да време прорачуна буде мање него када би се температура у већем броју временских тренутака израчунавала применом експлицитне методе.

У претходном тексту је изложен пример да је елемент топлопроводне средине са све четири стране окружен другим елементима топлопроводне средине. На слици 45 су дате одговарајуће алгебарске диференце једначине и за елементе топлопроводне средине који се налазе до граничних површи. Пошто је извођење неке од ових једначина једно од могућих испитних питањима, саветује се студентима да самостално (као „домаћи задатак“) изведу неку од једначина.

Конфигурација	Експлицитна метода		Имплицитна метода
	Једначина коначних разлика	Критеријум стабилности	
	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo \left(\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p \right) + (1-4Fo)\vartheta_{m,n}^p$	$Fo \leq \frac{1}{4}$	$(1+4Fo)\vartheta_{m,n}^{p+1} - Fo \left(\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} \right) = \vartheta_{m,n}^p$
	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = \frac{2}{3} Fo \left(\vartheta_{m+1,n}^p + 2\vartheta_{m-1,n}^p + 2\vartheta_{m,n+1}^p + \vartheta_{m,n-1}^p \right) + \left(1-4Fo - \frac{1}{3} Bi Fo \right) \vartheta_{m,n}^p$	$Fo(3+Bi) \leq \frac{3}{4}$	$\left(1+4Fo \left(1 + \frac{1}{3} Bi \right) \right) \vartheta_{m,n}^{p+1} - \frac{2}{3} Fo \left(\vartheta_{m+1,n}^{p+1} + 2\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + 2\vartheta_{m,n+1}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} \right) = \vartheta_{m,n}^p + \frac{4}{3} Bi Fo \vartheta_{\infty}$
	Чвор у унутрашњости угла са струјањем		

	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo \left(\begin{matrix} 2\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m,n+1}^p \\ + \vartheta_{m,n-1}^p + 2Bi\vartheta_{\infty} \end{matrix} \right) + (1-4Fo-2BiFo)\vartheta_{m,n}^p$	$Fo(2+Bi) \leq \frac{1}{2}$	$\begin{aligned} & (1+2Fo(2+Bi))\vartheta_{m,n}^{p+1} \\ & - Fo \left(\begin{matrix} 2\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} \\ + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} \end{matrix} \right) = \\ & \vartheta_{m,n}^p + 2BiFo\vartheta_{\infty} \end{aligned}$
Чвор на равном делу са струјањем			
	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = 2Fo \left(\begin{matrix} \vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p \\ + 2Bi\vartheta_{\infty} \end{matrix} \right) + (1-4Fo-4BiFo)\vartheta_{m,n}^p$	$Fo(1+Bi) \leq \frac{1}{4}$	$\begin{aligned} & (1+4Fo(1+Bi))\vartheta_{m,n}^{p+1} \\ & - 2Fo(\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1}) = \\ & \vartheta_{m,n}^p + 4BiFo\vartheta_{\infty} \end{aligned}$
Чвор на спољашњем углу са струјањем			

Слика 45

На вежбама ће бити урађен један пример нестационарног једнодимензионог преноса топлоте, у систему у коме постоји генерисање топлоте по запремини тела.

5.2.3. Графичка метода

Графичка метода за решавање стационарних дводимензионалних проблема топлотног провођења. Графичком методом се одређује подужни топлотни отпор између две произвољне изотермичке линије ($\Delta\theta_R$). Метода се заснива на цртању изотермичких линија (разлика температура за које се цртају две суседне изотермичке линије ($\Delta\theta_{корак}$) треба да буде иста; разлика температура између две изотермичке линије између којих се одређује подужни топлотни отпор ($\Delta\theta_R$) мора да буде једнак целобројном умношку (N_T) усвојеног корака између две изотермичке линије ($\Delta\theta_{корак}$) и линија топлотне снаге, следећи основно правило да изотермичке линије и линије топлотне снаге буду међусобно управне и да збир насупрмних страница добијених фигура буде приближно једнак (да се формирају „криволинијски квадрати“). Подужни топлотни отпор се одређује према изразу

$$r'_l = \frac{l}{\lambda} \frac{N_T}{N_S}, \tag{149}$$

где су: λ специфична топлотна проводност, N_T број изотермичких линија (при чему се броји само једна од две изотермичке линије између којих се одређује подужни топлотни отпор) и N_S број линија топлотне снаге.

5.2.4. Коришћење електричних аналогних модела

5.2.4.1. Коришћење дисконтинуалних модела

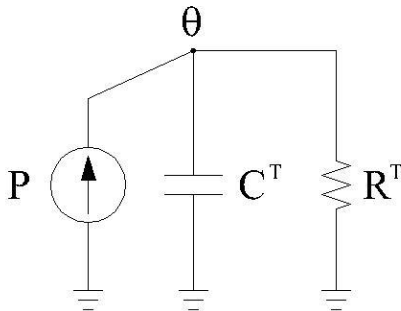
Као што је у претходним излагањима напоменуто, између топлотних и електричних појава постоји аналогија. Она се огледа у једнакости математичких форми (једначина) којима се описују те

појаве. То се може искористити да се направи аналогни електрични модел топлотног система. Онда се могу извршити мерења на електричном моделу, а затим из добијених резултата добити и вредности еквивалентних величина у топлотном систему.

За "свођење" топлотних величина на електричне и обрнуто, уводе се коефицијенти свођења, чије вредности треба да буду такве да се параметри у топлотном систему своде у погодан (практично лако изводљив) опсег параметара у електричном систему. При томе се преко димензија коефицијената свођења регулише и свођење јединица величина у топлотном систему у јединице величина у електричном систему (моделу).

Код избора параметара електричног система (елемената електричног кола) увек треба имати у виду њихову практичну остварљивост и потребу да се за мерења користе стандардни мерни инструменти. При избору елемената кола, електричне вредности не смеју бити ни превише велике (када би настао проблем мерне опреме и величине елемената), ни превише мале (када би се појавили проблеми мерне опреме и неповољан однос сигнал-шум).

Начин увођења коефицијената ће се објаснити на примеру елементарне топлотне шеме приказане на слици 46.



Слика 46

Једначина која описује ову топлотну шему гласи

$$P = C^T \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (150)$$

Као базни коефицијенати свођења топлотних на електричне величине се усвајају три коефицијента свођења (на пример: за топлотни и електрични отпор ($k_R = R^T / R$), топлотни и електрични капацитет ($k_C = C^T / C$) и разлику температура и напон ($k_U = \theta / U$)). Сви остали коефицијенти (за снагу и струју (k_I), време у топлотном и време у електричном систему (k_t), енергију и наелектрисање (k_Q) итд.) су по усвајању базних коефицијената свођења једнозначно одређени.

Усвојимо као базне коефицијенте свођења k_R , k_C и k_U . Ако се једначина (150) подели са односом два базна коефицијента k_U/k_R (означимо овај количник са k_I), долази се до

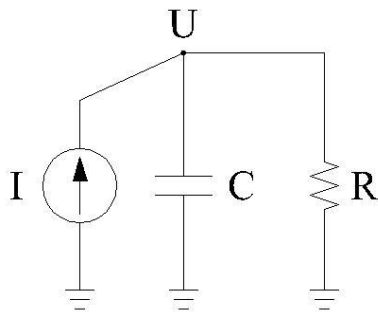
$$\frac{P}{k_I} = C^T k_R \frac{d\theta}{dt} + \frac{k_U}{R^T} \theta \quad (151)$$

Претходна једначина се може „проширити“ увођењем коефицијента свођења k_C ; након његовог увођења и једноставне трансформације израза долази се до

$$\frac{P}{k_I} = \frac{C^T}{k_C} \frac{d\theta}{\frac{t}{k_R k_C}} + \frac{k_U}{R^T} \theta \quad (152)$$

За елементарно електрично коло са једним струјним генератором, једним кондензатором и једним електричним отпорником, приказано на слици 47, диференцијална једначина која га описује гласи

$$I = C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} \quad (153)$$



Слика 47

Поређењем једначина (153) и (154) јасно је да је коефицијент свођења снаге у топлотном систему на струју у електричном систему једнак k_I , а времена у топлотном систему у време у електричном систему $k_t = k_R k_C$.

Поступак се може спровести на следећи начин. На основу карактеристика топлотног система се одређују вредности снаге загревања, топлотног капацитета и топлотног отпора (слика 46). Коефицијенти k_R , k_C и k_I се одређују тако да вредности елемената електричног кола са слике 47 – струја струјног генератора, отпор и капацитет, као и резултујући напон и време прелазног електричног процеса, буду у практично погодним границама. Затим би се на електричном колу извршило снимање промене напона у времену. Свакој регистрованој тачки напона U^* у тренутку t^* одговара тачка пораста температуре $\theta^* = k_U U^*$ у тренутку $k_t t^*$.

У збирци је дат један комплетан нумерички пример (задатак 40), а у четвртој лабораторијској вежби студенти ће имати прилике да спроведу комплетан поступак: формирање топлотне шеме, њено „свођење“ на електрични модел, мерења на електричном моделу и одређивање промене величина у топлотном систему које су еквивалентне измереним електричним величинама, одређивање промене величина у топлотном систему „свођењем“ резултата мерења у електричном систему.

5.2.4.2. Коришћење континуалних модела

Континуални електрични модели се користе као „додатак“ графичкој методи објашњеној у одељку 5.2.3. Помоћу континуалних електричних модела се експериментално може доћи до еквипотенцијалних линија у електричном моделу који је аналоган анализираном топлотном моделу. Ове еквипотенцијалне линије су аналогне изотермичким линијама у топлотном систему. Следећи корак је цртање линија температурног градијента (линија топлотне снаге) у топлотном систему, водећи се правилом да су линије топлотне снаге управне на изотермичке линије и да са њима формирају криволинијске квадрате.