4. Пренос топлоте зрачењем

4.1. Увод

Свако тело чија је температура површи већа од апсолутне нуле емитује енергију са своје површи путем електромагнетских таласа. С обзиром да електромагнетски таласи могу да се простиру и кроз вакуум, за овај облик преноса топлоте није неопходно постојање материјалне средине.

Теорија преноса топлоте зрачењем се бави следећим аспектима:

а) утврђивањем везе између снаге емитоване енергије и температуре површи

б) фреквентном расподелом електромагнетских таласа који преносе енергију

в) просторном расподелом зрачења

г) утврђивањем степена апсорпције енергије зрачења која са околних тела долази до површи посматраног тела

д) успостављањем поступака за утврђивање размене (тока) енергије између површи које образују затворен простор

С обзиром да размена топлоте зрачењем у великој мери зависи од карактеристика површи тела, погодно је увести појам некаквог референтног тела (површи), у односу на које се једноставно исказују карактеристике реалних површи. То референтно тело се назива црно тело и има следеће одлике:

- Било која површ која се налази на истој температури као референтно црно тело, зрачи мање енергије од црног тела. Са површи црног тела апсолутне температуре T_1 (K) енергија се зрачи површинском густином снаге

  $$ {}^{c}q_s = \sigma_c T_1^4 \tag{34}$$

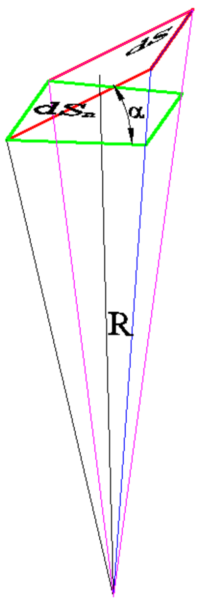
  (σ_c = 5.67 · 10^{-8} W / (m^2 K^4) – Штефан-Болзманова константа)

- Спектрална расподела снаге зрачења референтног црног тела је описана *Planck*-овим законом зрачења (${}^{c}q_{s\lambda}$ – површинска густина снаге на таласној дужини λ, c_1 = 1.44 · 10^{-2} m K, c_2 = 0.369 · 10^{-15} W m^2, T – апсолутна температура (K)):

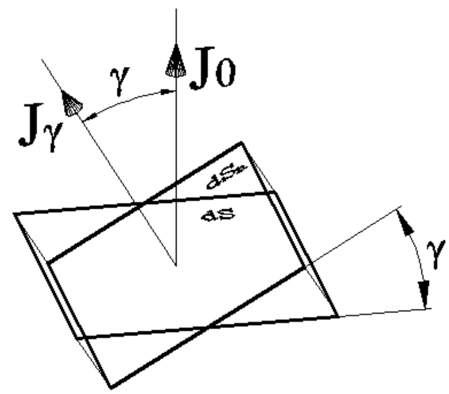
  $$ {}^{c}q_{s\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \tag{35}$$

- Црном телу се приписује идеална дифузна просторна расподела снаге зрачења. Она се исказује преко величине „јачина зрачења“ (J_γ), која се дефинише као елементарна снага која се зрачи у елементарни просторни угао. Елементарни просторни угао под којим се из неке тачке види елементарна површ dS (слика 10) је једнак dω = dS_n / R^2 = (dS cos α) / R^2), где је dS_n

површина површи dS пројектоване на раван управну на потег од тачке посматрања до посматране површи dS.



Слика 10



Слика 11

Као идеална дифузна расподела се сматра расподела описана *Lambert*-овим законом:

$$J_\gamma = J_0 \cos\gamma \qquad (36)$$

γ представља угао између правца у коме се посматра зрачење и нормале на површ, J_γ је јачина зрачења у правцу γ, а J_0 у правцу $\gamma = 0$ (слика 11).

Напомене:

а) У даљем тексту ће се користити и вредност $I_{\gamma,S}$, која представља количник јачине зрачења са елементарног дела површи и површине елементарне површи ($I_{\gamma,S} = J_\gamma$ / dS).

б) Приметимо да се у литератури може срести и алтернативна дефиниција *Lambert*-овог закона (израз (36)): J_γ / dS_n = J_γ / dS (видети слику 11).

Угао γ се мења у границама 0, 90 °; другим речима, површ зрачи само са једне стране, супротне од стране ка унутрашњости тела које је ограничено посматраном површи (видети слику 15).

- Сви електромагнетски таласи који стигну на површ црног тела се апсорбују, односно не постоји рефлексија таласа од површи црног тела.

Реалне површи преко којих тела са околином размењују енергију зрачењем имају особине које „одступају“ од наведених особина референтног црног тела. У највећем броју инжењерских проблема површи се могу посматрати као идеалне сиве површи – код идеалних сивих површи постоји једноставна веза између спектралне густине снаге зрачења сивог тела и спектралне густине снаге зрачења коју би имало референтно црно тело на истој температури:

$$ {}^{\varepsilon}q_{s\lambda}(\lambda,T)=\varepsilon\,{}^{c}q_{s\lambda}(\lambda,T) \qquad (37)$$

ε представља коефицијент сивоће (емисивност) сиве површи (сивог тела). Наравно, иста веза важи и за однос укупних енергија, једнаким интегралу $q_{s\lambda}$ у читавом опсегу таласних дужина. Даље, реална апсорпциона својства се обично описују преко коефицијента апсорпције (A), који представља однос снаге апсорбоване од стране тела и укупне снаге којом се енергија доводи до површи. Подсетимо, овај коефицијент код црног тела, за било коју таласну дужину упадног зрачења, износи 1. У већини реалних инжењерских примена, коефицијент апсорпције је константан (не зависи од таласне дужине) и једнак је коефицијенту сивоће (једнакост $A=\varepsilon$ је једна од карактеристика идеалне сиве површи). Коначно, просторна расподела јачина зрачења идеалног сивог тела се мења по *Lambert*-овом закону.

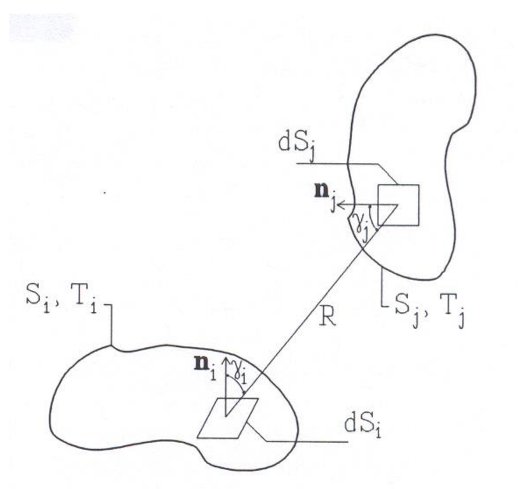
4.2. Фактор виђења

Са становишта примене у електроенергетици, најважнији резултат теорије преноса топлоте зрачењем је метода за израчунавање размене енергије између површи тела које се налазе на различитим температурама. Метода је заснована на "факторима виђења" и шемама зрачења. Поставка на којој је теорија изграђена је да површи тела зраче дифузно (по *Lambert*-овом закону).

"Фактор виђења" $F_{i\to j}$ се дефинише као количник енергије који са површи i стигне до површи j и укупне енергије која се емитује са површи i.

Елементарна снага која се са елементарне површи тела i (dS_i) емитује до елементарне површи тела j (dS_j), слика 12, износи:

$$ dq_{i\to j}=J_{\gamma_i}\,d\omega_{i\text{-}j}=I_{\gamma_i,S}\,dS_i\,d\omega_{i\text{-}j}\ , \qquad (38)$$



Слика 12

$I_{\gamma i,S}$ – количник јачине зрачења са елементарног дела површи (dS_i) у правцу који са нормалом заклапа угао γ_i и површине елементарне површи (dS_i), dS_i и dS_j – површина елементарних површи тела i и j, d$\omega_{i\text{-}j}$ – елементарни просторни угао под којим се са елементарне површи dS_i види елементарна површ dS_j и

R – растојање између елементарних површи dS_i и dS_j.

Након уврштавања вредности за елементарни просторни угао d$\omega_{i\text{-}j}$ = dS_j / R^2 = (dS_j cos γ_j) / R^2, долази се до

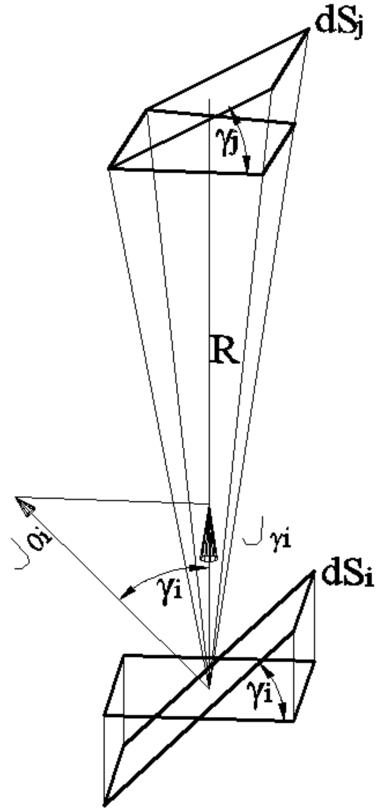
$$d\,q_{i\rightarrow j} = I_{\gamma_i,S}\; d\,S_i\; \frac{d\,S_j\;\cos\gamma_j}{R^2}\;. \tag{39}$$

За случај да се расподела зрачења у полупростор са елементарног дела површи S_i врши по *Lambert*-овом закону (36), што важи код површи дифузних карактеристика,

$$I_{\gamma_i,S} = I_{0i,S}\;\cos\gamma_i\;, \tag{40}$$

израз (39) постаје (слика 13)

$$d\,q_{i\rightarrow j} = I_{0i,S}\;\cos\gamma_i\;d\,S_i\;\frac{d\,S_j\;\cos\gamma_j}{R^2}\;. \tag{41}$$



Слика 13

Јачина зрачења са елементарног дела површи у правцу нормале, подељена са површином елементарне површи једнака укупној површинској густини снаге (q_{si}) зрачења подељеној са π (овај израз биће изведен у делу „*Извођење израза* (42)“, након израза (46)):

$$I_{0i,S} = \frac{q_{si}}{\pi}\;. \tag{42}$$

Заменом израза за $I_{0i,S}$ (42) у израз (41) долази се до:

$$d\,q_{i\to j} = \frac{1}{\pi}\,q_{Si}\,\cos\gamma_i\,d\,S_i\,\frac{d\,S_j\,\cos\gamma_j}{R^2} \tag{43}$$

$$d\,q_{i\to j} = q_{Si}\,\frac{\cos\gamma_i\,\cos\gamma_j}{\pi\,R^2}\,d\,S_i\,d\,S_j \tag{44}$$

Укупна снага преноса енергије од површи *i* ка површи *j* се добија интеграцијом израза за елементарну снагу (44):

$$q_{i\to j} = q_{S\,i}\int\limits_{S_i}\int\limits_{S_j}\frac{\cos\gamma_i\,\cos\gamma_j}{\pi\,R^2}\,d\,S_i\,d\,S_j \tag{45}$$

Вредност $q_{si} = \varepsilon\,\sigma_c\,T_i^4$ се може извући испред интеграла у случају да је температура по површи тела *i* константна.

Према дефиницији, "фактор виђења" се одређује према изразу

$$F_{i\to j} = \frac{q_{i\to j}}{q_{S\,i}\;S_i} = \frac{1}{S_i}\int\limits_{S_i}\int\limits_{S_j}\frac{\cos\gamma_i\,\cos\gamma_j}{\pi\,R^2}\,d\,S_i\,d\,S_j\;. \tag{46}$$

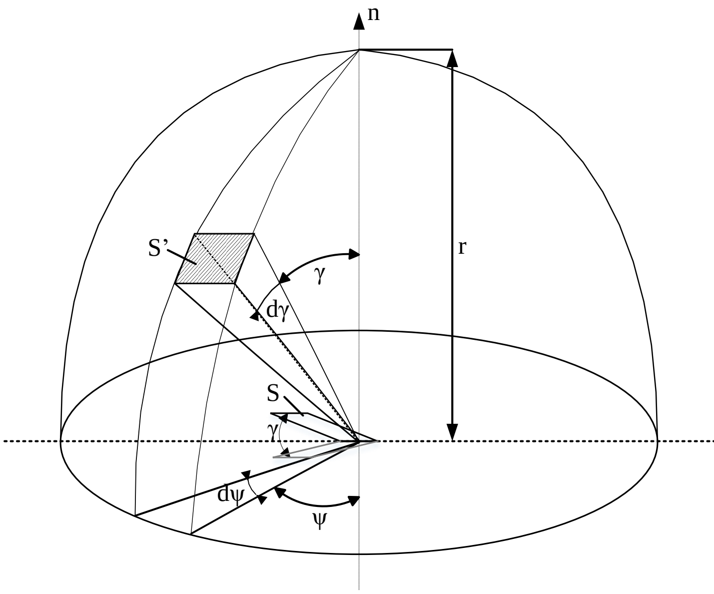
<<< ———————————————————————————————— >>>

Извођење израза (42):

Снага којом се са јединичне површине елементарне површи *dS* енергија зрачи кроз елементарни просторни угао *dω*, под којим се види елементарна површ *dS'* на полусфери (као што је приказано на слици И.1.), износи:

$$dq_{Si} = I_{\gamma i,S}\cdot d\omega \tag{И.1.}$$

Просторни угао dω под којим се из тачке у центру круга види елементарна површ на полусфери полупречника r је једнак: $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}S'_n / r^2 = \mathrm{d}S' / r^2 = (r\cdot\sin\gamma\,\mathrm{d}\psi\cdot r\cdot\mathrm{d}\gamma) / r^2 = \sin\gamma\,\mathrm{d}\psi\cdot\mathrm{d}\gamma$ (угао између потега полупречника и елементарне површи на полусфери је 90°, због чега је $\mathrm{d}S'_n = \mathrm{d}S'$).



Слика И.1.

Веза површинске густине снаге која се зрачи у полупростор са површи *dS* и јачине зрачења са елементарног дела по јединици његове површине у смеру нормале, добија се површинском интеграцијом свих елементарних снага зрачења које се зраче у елементарне просторне углове *dω* под којима се виде елементарне површи полусфере (границе интеграције су: од $\psi_1 = 0$ до $\psi_2 = 2\pi$ и од $\gamma_1 = 0$ до $\gamma_2 = \pi/2$):

$$q_{Si} = \int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\gamma=0}^{\pi/2} I_{\gamma i,S}\cdot \sin\gamma \cdot d\psi \cdot \mathrm{d}\gamma \qquad \text{(И.2.)}$$

$$q_{Si} = \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\gamma=0}^{\pi/2} I_{0i,S}\cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma \qquad \text{(И.3.)}$$

$$q_{Si} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} I_{0i,S} \cdot \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos\pi) = \pi \cdot I_{0i,S} \qquad \text{(И.4.)}$$

Са површи црног тела температуре *T* енергија се зрачењем, према *Stefan-Boltzman*-овом закону (34), одводи површинском густином снаге

$$q_{Si} = C_c \left(\frac{T}{100}\right)^4 \qquad \text{(И.5.)}$$

Из претходне две једначине, (И.4.) и (И.5.), добија се јачина зрачења са елементарне површи црног тела (температуре *T*) по јединици површине елементарног дела у смеру нормале на ту површ:

$$I_{0i,S} = \frac{1}{\pi}\cdot q_{Si} = \frac{1}{\pi}\cdot C_c \left(\frac{T}{100}\right)^4 \qquad \text{(И.6.)}$$

<<< ——— >>>

Аналогно извођењу израза (46), за "фактор виђења" $F_{j\to i}$ се, под истим претпоставкама (да је површ S_j изотермичка и да има дифузиона својства зрачења) добија:

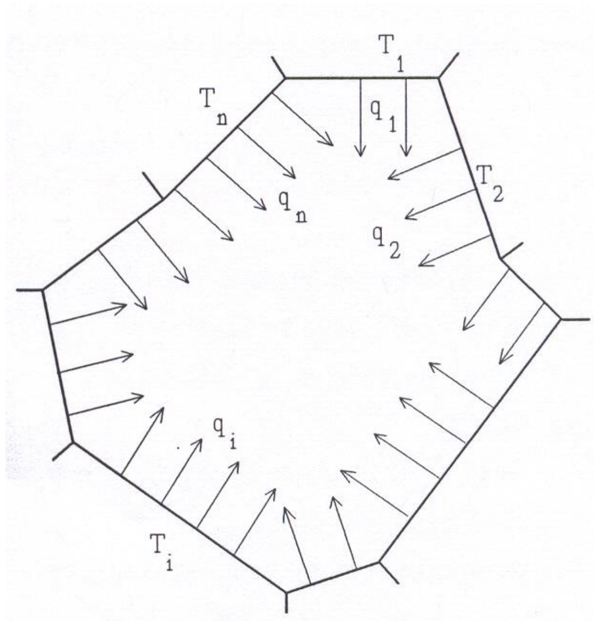
$$F_{j\to i} = \frac{1}{S_j} \int_{S_i}\int_{S_j} \frac{\cos\gamma_i \cos\gamma_j}{\pi R^2} \, dS_i \, dS_j \ , \tag{47}$$

одакле се долази до важне релације између "фактора виђења"

$$S_i F_{i\to j} = S_j F_{j\to i} \ . \tag{48}$$

Када n површи произвољног облика образују затворен простор, као на пример на слици 14, према дефиницији "фактора виђења" и закону одржања енергије могу се за сваку од површи поставити једнакости

$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1 \ , i = \overline{1, N} \ . \tag{49}$$



Слика 14

"Фактор виђења" F_{ii} има вредност нула за равне и конвексне (испупучене) површи. За конкавне, његова вредност је већа од нуле. Ако затворену површ ограничава N површи, укупно постоји N^2 "фактора виђења". Наведена два правила, дата изразима (48) і (49), омогућавају да директно (користећи дефинициони интеграл) не мора да се одређује свих N^2, већ само

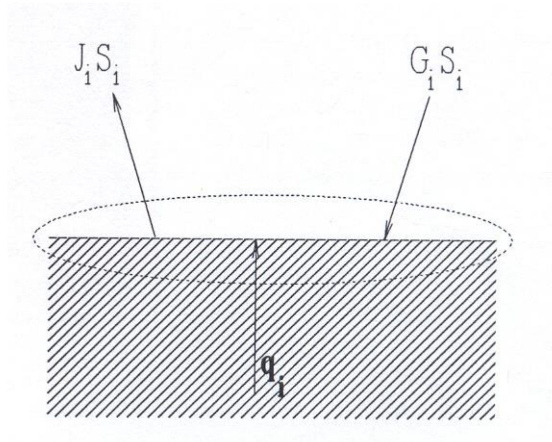
$$N^2 - \frac{N(N-1)}{2} - N = \frac{N(N-1)}{2} \tag{50}$$

"фактора виђења".

"Фактори виђења" се у класичној инжењерској пракси одређују користећи следеће методе: а) аналитичко решавање дефиниционог интеграла (за неке елементарне случајеве), б) према изведеним правилима и в) формулама које се могу наћи у литератури за неке карактеристичне геометрије.

Сада ће се спровести теоријске анализе на основу којих се постављају радијационе шеме. Помоћу радијационих шема се може решити велики број практичних инжењерских проблема.

4.3. Радијационе шеме



Слика 15

Посматрајмо једну површ тела (површине S_i), са које се зрачењем одводи енергија снагом $J_i\,S_i$, а на њу доводи снагом $G_i\,S_i$ (са површи тела са којима се енергија размењује зрачењем) - слика 15.

Да би се одржало такво стационарно стање, до површи је из унутрашњости тела потребно доводити енергију снагом

$$q_i = S_i\,(\,J_i - G_i\,)\,. \qquad (51)$$

Површинска густина снаге којом се енергија одводи са површи тела се састоји од две компоненте. Прва компонента је одређена основним законом зрачења површи чија је температура већа од апсолутне нуле. Друга компонента је рефлектована компонента упадног зрачења (коефицијент рефлексије ρ_i). Дакле,

$$J_i = E_i + \rho_i\,G_i\,. \qquad (52)$$

Између коефицијената апсорпције и рефлексије постоји веза $A_i = 1 - \rho_i$ (не третира се трансмисија). Из (51) i (52) се може написати следећи израз за површинску густину снаге q_i:

$$q_i = S_i\,\big((E_i + \rho_i\,G_i) - G_i\big) = S_i\,(\,E_i - (1-\rho_i)G_i\,) = S_i\,(\,E_i - A_i\,G_i\,)\,. \qquad (53)$$

Потребно је формирати систем једначина (и њему одговарајућу еквивалентну радијациону шему) из које се, на основу дефинисаних улазних величина (познатих температура површи или познатих снага q_i) одређују непознате вредности температура површи и снага q_i. У енергетском билансу (51) се појављују две међу-променљиве (J_i и G_i). Израз (52) омогућава елиминацију једне од ове две међу-променљиве: у изразу (53) је елиминисано J_i, а изразима који следе то ће бити учињено за G_i, која ће се исказати преко осталих величина. За идеално сиво тело коефицијента сивоће ε_i, који је једнак коефицијенту апсорпције A_i ($\varepsilon_i = A_i = 1 - \rho_i$), израз (52) се може написати (узимајући у обзир законитост дату изразом (37)) у форми

$$J_i = \varepsilon_i\,E_{bi} + (\,1 - \varepsilon_i\,)\,G_i\,, \qquad (54)$$

где је E_{bi} површинска густина снаге зрачења црног тела чија је температура једнака температури посматране површи ($E_{bi} = \sigma_c\,T_i^4$). Решавањем претходне једначине по G_i и заменом у (51), добија се

$$q_i = S_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1 - \varepsilon_i} \right), \tag{55}$$

односно

$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{\dfrac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}}. \tag{56}$$

Ова једнакост се може се приказати елементом мреже приказаним на слици 16.

За површ i су непознате три величине, а за сада постоји само једна једначина, једначина (56); у принципу, једна од величина (q_i или E_{bi}) ће бити задата као улазни податак. Ово важи за сваку од N површи које образују затворен простор. „Недостајућих“ N једначина представљају математички исказ енергетског биланса да је укупна енергија која се зрачењем преноси од осталих површи (j) ка површи i једнака збиру енергија који долазе са сваке од површи. При томе се користи дефиниција фактора виђења, да је снага којом се енергија зрачењем преноси са површи j на површ i једнака укупној снази која се зрачењем одводи са површи j помноженој са фактором виђења површи i са површи j: $F_{j \to i}$. Дакле, снага којом се енергија зрачењем преноси од свих преосталих површи ($j = 1, 2, ..., i, ..., N$) ка површи i, једнака је

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ji} S_j J_j , \tag{57}$$

односно

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} S_i J_j . \tag{58}$$

Скраћивањем површина S_i у претходном изразу и сменом тако добијеног израза за G_i у израз (51), добија се

$$q_i = S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j \right), \tag{59}$$

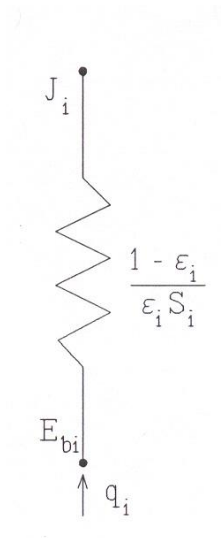
односно, према (49),

$$q_i = S_i \left(\sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j \right). \tag{60}$$

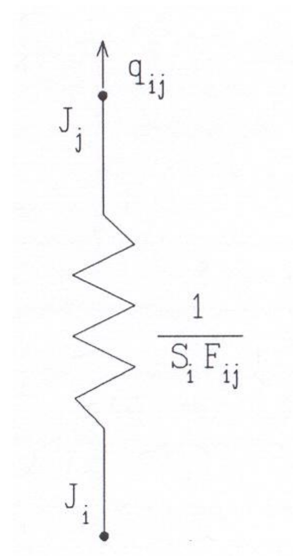
Дакле,

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} S_i F_{ij} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^{N} q_{ij} , \tag{61}$$

што значи да је снага којом се енергија доводи површи i једнака збиру снага размене топлоте између површи i и сваке од преосталих површи (снага размене енергије између површи i и неке од преосталих површи има позитиван предзнак ако се преноси од површи i). Размена енергије између површи i и сваке од преосталих површи се може приказати елементом мреже приказаним на слици 17.



Слика 16

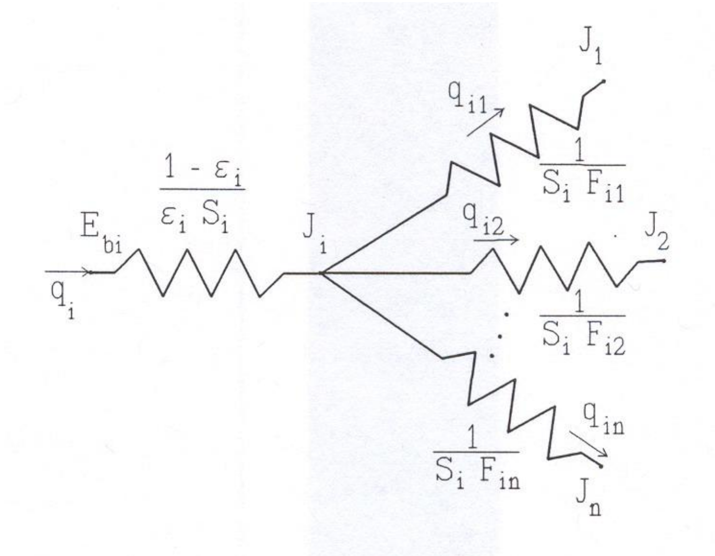


Слика 17

Из једначина (56) и (61) се добија

$$\frac{E_{bi} - J_i}{\dfrac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{\dfrac{1}{S_i F_{ij}}} \ . \tag{62}$$

На основу ове једнакости се може нацртати мрежа која одговара енергетском билансу једне површи. Она је приказана на слици 18.



Слика 18

Следећи ове принципе и за остале површи, могуће је формирати комплетну отпорну мрежу и на бази ње одредити жељене вредности (за решавање је потребно задавање довољног броја температура површи T_i, што значи задавање E_{bi} ($E_{bi} = \sigma_c T_i^4$) или снага q_i које се провођењем доводе од унутрашњости тела до граничне површи). Практично, постоји $3N$ непознатих, за које се на описани начин (коришћењем описане радијационе шеме) поставља $2N$ једначина, а N вредности (T_i или q_i) мора бити задато као улазна величина.

Прва два задатка у поглављу у Збирци о зрачењу се такође могу решити применом ове теорије, али су као уводни решавани на елементаран начин, применом закона о одржању енергије (слично начину које је примењен у претходном тексту, у коме је објашњен начин формирања радијационих шема).