

Текст **маркиран жутом бојом** погледати **информативно** - није потребно за испит

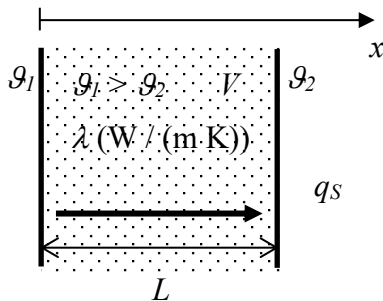
1 Уводни део о преносу топлоте

Пренос топлоте (топлота) је прелазак топлотне енергије између тела услед разлике њихових температура. Количина топлотне енергије сваког тела (које се налази на температури ϑ) може се посматрати као апсолутна вредност (са референтном нултом вредношћу на температури апсолутне нуле), или као релативна вредност (у односу на референтно стање на температури ϑ_{ref}).

1.1 Основни облици преноса топлоте

Изрази за површинску густину снаге преноса топлоте (q_s , W / m²) за њене основне облике:

- 1) Провођење кроз чврсто тело или флуид у мировању



Слика 1

λ - специфична топлотна проводност (W / m K)

Основна законитост преноса топлоте провођењем се исказује *Fourie*-овим законом, који даје везу између вектора површинске густине снаге преноса топлоте ($\vec{q}$) и градијента температуре (ϑ):

$$\vec{q}_s = -\lambda \text{grad}(\vartheta) \quad (1)$$

У случају једнодимензионог преноса топлоте провођењем у *Descartes*-овом координатном :

$$q_s = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \quad (2)$$

За стационарно топлотно стање и случај да нема генерисања топлоте унутар тела топлота је константна по x координати:

$$q_s = \text{const.} \quad (3)$$

Имајући у виду (2), закључује се и да градијент температуре има константну вредност, те се може израчунати као количник разлике температуре на граничним површима зида и дебљине зида:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \text{const.} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{L} \quad (4)$$

Из (2) и (4) се добија:

$$q_s = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{L} \quad (5)$$

До израза (5) се може доћи и решењем диференцијалне једначине (2), чије опште решење гласи

$$\vartheta = - \frac{q_s}{\lambda} x + C_1 \quad (6)$$

Интеграциона константа се добија из граничног услова $\vartheta(x=0) = \vartheta_1$, одакле се добија $C_1 = \vartheta_1$, тако да је решење диференцијалне једначине (2)

$$\vartheta = - \frac{q_s}{\lambda} x + \vartheta_1 \quad (7)$$

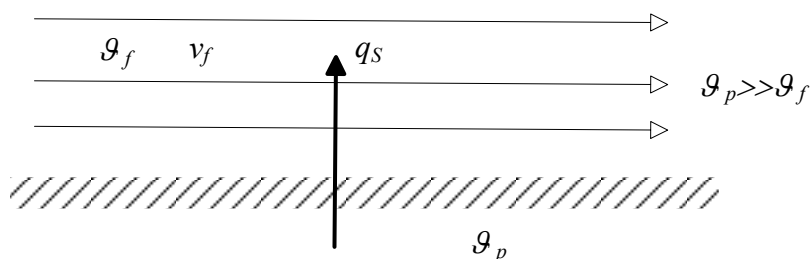
Из израза (7) се добија вредност температуре (ϑ_2) на десној страни ($x=L$) зида

$$\vartheta_2 = - \frac{q_s}{\lambda} L + \vartheta_1, \quad (8)$$

што представља израз идентичан изразу (5).

Описивање случаја нестационарног (временски променљивог) случаја, и / или случаја у коме постоји генерисање топлоте по запремини, захтева примену опште температурне једначине, која ће бити приказана у Поглављу 5.

- 2) Струјање са површи ка флуиду који се креће (приказан на слици) или обрнуто (са флуида ка површи)



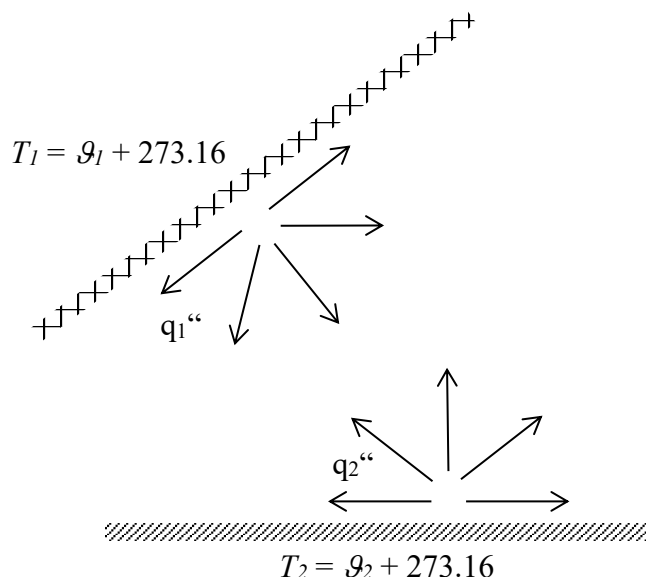
Слика 2

$$q_s = \alpha(\vartheta_p - \vartheta_f) \quad (9)$$

v_f – брзина флуида (m / s), α – коефицијент преласка топлоте струјањем (W / m² K)

3) Размена енергије између две површи зрачењем

Ова размена топлоте се одвија између површи на различитим температурама, и то путем електромагнетских таласа који се простиру између површи (они се могу простирати и кроз вакуум)



Слика 10

$\theta(^{\circ}C)$ - температура исказана у степенима *Celsius*-ове скале

$T(K)$ - температура исказана у степенима *Kelvin*-ове скале

$$T = \theta + 273.16$$

Због разлике температура

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \equiv T_1 - T_2(K) \quad (10)$$

долази до размене топлоте зрачењем између две површи.

Површинска густина снаге зрачења са површи која се налази у слободном простору и чија је температуре T (изражена у K), већа од апсолутне нуле:

$$q_s = \varepsilon \sigma_c T^4 \quad (11)$$

$$\sigma_c = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Поред компоненте зрачења са тела температуре T која је описана изразом (11), у случају да више површи образују затворен простор постоје и компоненте зрачења са сваке од њих одлази и рефлектована компонента зрачења, која зависи од укупног зрачења које на ту површ долазе са осталих површи. Остатак укупног зрачења које пада на површ се апсорбује. За одређивање размене топлоте зрачењем потребно је сагледати и просторну расподелу зрачења са површи.

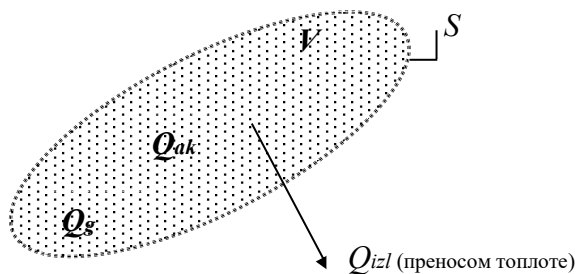
Однос „пренос топлоте“ / „термодинамика“

Термодинамика се бави равнотежним (по запремини) стањем флуида (стање: притисак, температура, запремина).

Питањем колика је пренета топлота која настаје као резултат термичке неравнотеже, односно разлике температура, а који је проткан кроз целу електро-енергетику, не бави се термодинамика већ теорија преноса топлоте.

1.2 Закон одржања енергије као базни закон преноса топлоте

1.2.1 Примена на затворен систем



Слика 4

$$t \in (t_1, t_2)$$

$$Q_g = Q_{ak} + Q_{izl} \quad (12)$$

$$t = t^*$$

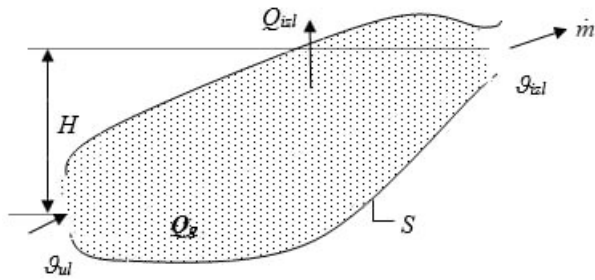
$$P_g = P_{ak} + P_{izl} \quad (13)$$

Енергија (Q (J)), односно снага промене енергије (P (W)), може бити:

- Промена акумулисане енергије (Q_{ak}, P_{ak}) > 0 ако температура унутар запремине V расте, (Q_{ak}, P_{ak}) < 0 ако температура унутар запремине V опада
- Пренос топлоте (Q_{izl}, P_{izl}) > 0 ако се енергија преноси од запремине V ка околини, (Q_{izl}, P_{izl}) < 0 ако се енергија преноси од околине ка запремини V
- За генерисану топлоту по правилу (Q_g, P_g) > 0

$$Q_g = \pm Q_{ak} \pm Q_{izl} \quad (14)$$

1.2.2 Примена на отворен систем са константним протоком



Слика 5

$\dot{m}$ - Масени проток флуида (kg / s)

ρ - Густина флуида (kg / m³)

Под условима

- некомп्रेसибилни флуид: специфични масени топлотни капацитет $c_p = c_v = c$ (J / (kg K))
- стационарни режим
- занемарљиво трење између флуида и површи тела
- занемарено провођење топлоте кроз флуид супротно смеру позитивног градијента температуре

важи:

$$\dot{m}c_p(\vartheta_{ul} - \vartheta_{izl}) + \dot{m}\left(\frac{v_{ul}^2}{2} - \frac{v_{izl}^2}{2}\right) + \dot{m}gH + \left(\frac{\dot{m}}{\rho_{ul}}p_{ul} - \frac{\dot{m}}{\rho_{izl}}p_{izl}\right) = P_{izl} - P_g \quad (15)$$

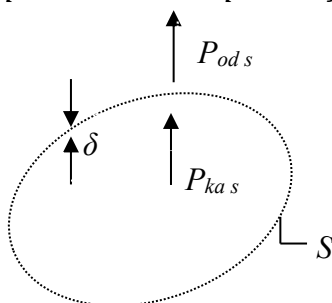
С обзиром на опсег реалних вредности појединих чланова у претходној једначини, она се, без значајног губитка тачности, своди на израз

$$\dot{m}c_p(\vartheta_{ul} - \vartheta_{izl}) = P_{izl} - P_g \quad (16)$$

односно

$$\dot{m}c_p(\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) = P_g - P_{izl} \quad (17)$$

1.2.3. Примена на површи које ограничавају затворен систем



Слика 6

$$P_{od s} = P_{ka s} \quad (18)$$

$P_{ka s}$ - Снага преноса топлоте (најчешће провођењем) из чврсте материје ка граничној површи

$P_{od s}$ - Снага преноса топлоте од граничне површи (најчешће струјањем и зрачењем) ка околини

Објашњење једноставне законитости (18):

P_{ak} у слоју јако мале дебљине δ је приближно нула; по правилу исто важи и за P_g

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^\delta P_g(x) dx \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^\delta P_{ak}(x) dx \right) = 0 \quad (19)$$

2 Пренос топлоте струјањем

У поглављу 1 (Уводни део о преносу топлоте), наведен је основни закон преноса топлоте струјањем (једначина (9)), да је површинска густина снаге преноса топлоте струјањем једнака производу коефицијента преласка топлоте струјањем (α) и разлике температура површи и флуида:

$$q_s = \alpha(\vartheta_p - \vartheta_f)$$

Уколико је температура површи већа од температуре флуида ($\vartheta_p > \vartheta_f$), топлота прелази са топлије површи на хладнији флуид и α представља коефицијент преласка топлоте струјањем са површи на флуид. Уколико је температура флуида већа од температуре површи ($\vartheta_f > \vartheta_p$), топлота прелази са топлијег флуида на хладнију површ и α представља коефицијент преласка топлоте струјањем са флуида на површ.

Наведени основни закон струјања је веома једноставан. Читава теорија конвективног преноса топлоте (преноса топлоте струјањем) се бави успостављањем формула за одређивање коефицијента преласка топлоте струјањем (α). Овај задатак је комплексан и за дефинисање формула се по правилу користе резултати експеримената (они се у савременој инжењерској пракси могу допунити / заменити прорачунима помоћу софтвера написаних на основу методе коначних елемената – *FEM*). Теоретским разматрањима (теорија сличности) долази се до облика формула за различите случајеве преноса топлоте струјањем (на пример природно / принудно, ламинарно / турбулентно, итд.), а коефицијенти у њима се одређују на бази експеримената / *FEM* прорачуна.

Флуид у непосредној близини граничне површи се налази у стању мировања, па се снага преноса топлоте од површи може израчунати преко *Fourie*-овог закона преноса топлоте:

$$q_s = -\lambda_f \left(\frac{\partial \vartheta_f}{\partial y} \right)_{y=0+} \quad (20)$$

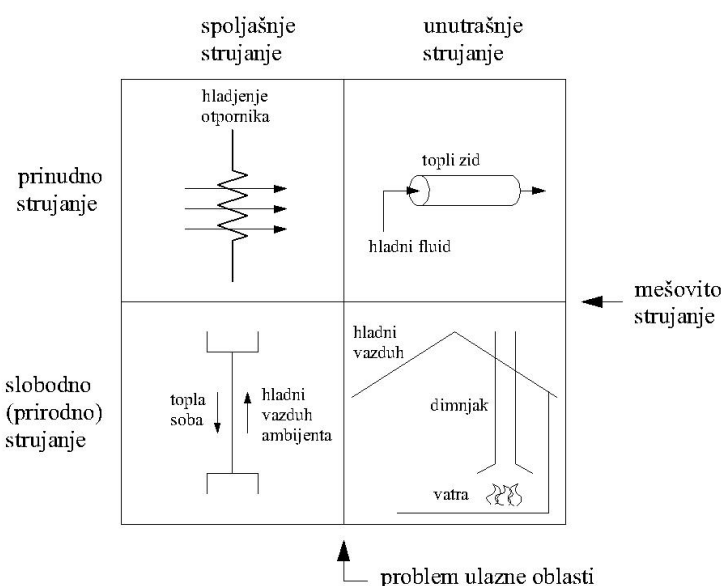
(y оса је управна на граничну површ). Из овог израза и дефиниционог израза за α (9) следи да је

$$\alpha = -\frac{\lambda_f}{\vartheta_p - \vartheta_f} \left(\frac{\partial \vartheta_f}{\partial y} \right)_{y=0+} \quad (21)$$

где ϑ_f представља температуру флуида ван граничног температурног слоја уз површ (постоји слој флуида, уз површ, у коме се мења брзина и температура флуида). Да би се из претходног израза одредила вредност α потребно је познавати расподелу температуре у граничном слоју флуида. На жалост, израз (21) даје само квалитативно објашњење, а његова практична примена захтева да буде позната расподела температуре у граничном слоју. За њено одређивање потребно је решити међусобно повезана три система диференцијалних једначина: одржања масе, одржања импулса и одржања енергије. Постоје савремени софтверски пакети који у себи садрже солвере ових CFD (Computational fluid dynamics) једначина.

Концепт овог курса је „апликативни пренос топлоте“, што значи да се студенти упознају са формулама за коефицијент преласка топлоте струјањем које су проистекле из теоријских разматрања и експеримента, а чија је форма релативно једноставна и који се могу применити на решавање инжењерских проблема без дубоког улажења у теорију механике флуида. Постоји неколико начина преноса топлоте струјањем, за које се разликују облици математичких форми које их адекватно описују.

Једна од могућих почетних класификација је приказана на слици 7.



Слика 7

Принудно струјање – покретање флуида – настаје као резултат спољашње силе која покреће флуид (примена вентилатора / пумпи). Природно струјање настаје као последица загревања / хлађења флуида – флуид који се загрева се шири, има мању густину и последично се јавља сила која покреће флуид на горе; флуид који се хлади има мању густину и креће се на доле. У случају

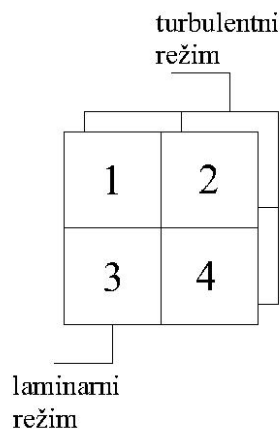
да се флуид креће у затвореној петљи, вредност протока флуида зависи од сила у зонама у којима се флуид загрева / хлади, односно од просторне расподеле снага загревања / хлађења флуида. Правило је да се зоне загревања налазе на мањим висинама од зона хлађења.

„Спољашње“ и „унутрашње“ струјање се суштински разликују јер је у случају унутрашњег струјања ограничен простор у коме се развијају профили температуре и брзине флуида поред површи са којом флуид размењује топлоту, док то није случај код спољашњег струјања. Профили температуре и брзине флуида утичу на коефицијент преноса топлоте струјањем и на вредност пада притиска услед протока флуида.

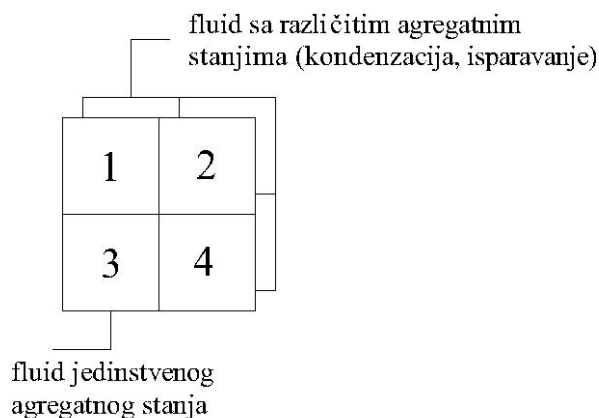
У вези са профилима температуре и брзине флуида, постоји улазна област, од почетка површи до локације од које се може сматрати да су профили достигли своју устаљену форму. За одређивање вредности коефицијента преласка топлоте струјањем у улазној области се користе формуле које се разликују од оних које се примењују у областима са потпуно развијеним профилем.

Примера ради, у енергетском трансформатору се могу срести све наведене форме струјања. Код уља се доминантно среће унутрашње струјање – кроз канале за хлађење у намотајима (топлота прелази са намотаја на уље) и у радијаторима (топлота прелази са уља на зид радијатора). Струјање ваздуха, као спољашњег расхладног флуида (на површима суда и радијатора), по правилу се може посматрати као спољашње струјање. Струјање уља и струјање ваздуха може бити природно и принудно (принудно се одликује значајно већим вредностима коефицијента преласка топлоте струјањем – за уље у намотајима оријентациона вредност када уље струји природно је $65 \text{ W} / (\text{m}^2 \text{ K})$, а када струји принудно $300 \text{ W} / (\text{m}^2 \text{ K})$; за прелазак топлоте струјањем ваздуха за природно струјање се оријентационо има $5 - 7 \text{ W} / (\text{m}^2 \text{ K})$), а за принудно $30 \text{ W} / (\text{m}^2 \text{ K})$).

Класификација са претходне слике може даље да се „шири“. Прво „ширење“ на „две равни“ је тип струјања (слика 8) – ламинарно и турбулентно, код којих су значајно различите вредности коефицијента α (у случају турбулентног струјања α има значајно већу вредност). Друго „ширење“ је према агрегатном стању флуида (слика 9) – да ли у слоју флуида уз површ долази до промене агрегатног стања (течност – гас) или не.



Слика 8



Слика 9

Даљи суштински аспекти су:

- Да ли је површ са које се топлота преноси ка флуиду / од флуида таква да се може сматрати да је константна:
 - Температура по површи
 - Површинска густина снаге по површи
- Да ли се одређивање коефицијената преласка топлоте врши:
 - У „свакој“ тачки посебно
 - Средња вредност за читаву површ

За сваки од наведених случајева постоје специфичне форме израза за израчунавање коефицијената преласка топлоте струјањем.

У једној од лабораторијских вежби се израчунава коефицијент преласка топлоте природним струјањем уз вертикалну плочу.

У наставку текста је дат пример принудног струјања (ламинарног и турбулентног) преко равне плоче.

Зависност α , који важи за све случајеве струјања, од *Nusselt*-овог броја, гласи

$$\alpha = \frac{\lambda Nu}{L}, \quad (22)$$

где је L карактеристична димензија (карактеристична дужина). У примеру принудног струјања преко равне плоче карактеристична димензија је дужина плоче у правцу струјања флуида.

У случају принудног струјања, када се кретање флуида врши на рачун спољашње погонске силе, *Nusselt*-ов број се исказује као функција *Reynolds*-овог броја:

$$Re = \frac{u_{\infty} L}{\nu} \quad (23)$$

u_∞ представља брзину струјања флуида ван граничног слоја, односно довољно далеко од граничне површи тела, где се брзина и температура флуида више не мењају; L је карактеристична димензија, ν кинематска вискозност флуида. Критеријум режима струјања флуида се исказује преко вредности *Reynolds*-овог броја – уколико је он већи од граничне вредности (типично $5 \cdot 10^5$) струјање је турбулентно, а ако је мањи, струјање је ламинарно.

За принудно спољашње струјање преко равне плоче, у случају да је струјање по целој дужини плоче ламинарно, локални коефицијент преласка топлоте струјањем α_x (на растојању x од почетка плоче) израчунава по формули

$$\alpha_x = \frac{\lambda Nu_x}{x}, \quad (24)$$

где је

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}, \quad (25)$$

уз услов да је *Prandtl*-ов број (он представља карактеристику флуида) $Pr \geq 0.6$. Израз (25) је дат за случај константне температуре површи ($\mathcal{G}_p$). Параметри флуида су температурно зависни и одређују се за средњу вредност температуре површи и флуида далеко од површи (температуре „непоремећене масе“ флуида, односно температуре флуида ван граничног слоја ($\mathcal{G}_f$)): $(\mathcal{G}_p + \mathcal{G}_f) / 2$.

Средња вредност коефицијента преласка топлоте струјањем α на некој деоници плоче се лако одређује из познате функције расподеле локалне вредности коефицијента $\alpha_x(x)$. Примера ради, средња вредност од почетка плоче до позиције на координати x је једнака

$$\bar{\alpha}_x(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha_x(x) dx = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\lambda \left(0.332 \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \right)}{x} dx = 2\alpha_x(x) \quad (26)$$

У посматраном случају средња вредност коефицијента преласка топлоте на деоници од почетка плоче до тачке са координатом x је једнака двострукој вредности локалног коефицијента преласка топлоте у тачки са координатом x . Дакле, коефицијент преласка топлоте опада са растојањем од почетка плоче. То значи да се, у случају константне температуре плоче, са повећањем растојања од почетка плоче смањује површинска густина снаге којом се енергија са плоче преноси ка флуиду.

За турбулентно струјање *Nusselt*-ов број се може одредити из израза

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}, \quad (27)$$

који важи при $60 > Pr \geq 0.6$ и $Re_L \leq 10^7$ (израз се може применити и до $Re_L \leq 10^8$, са грешком до 15 %).

Ако флуид струји тако да постоји област ламинарног, за $x \in (0, x_c)$ и област турбулентног струјања, за $x > x_c$, средњи коефицијент преласка топлоте на плочи дужине L (α_{sr}) се израчунава према

$$\alpha_{sr} = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_c} \alpha_{lam}(x) dx + \int_{x_c}^L \alpha_{turb}(x) dx \right) \quad (28)$$

Замењујући претходно дате изразе за коефицијент преласка топлоте у области ламинарног (25) и у области турбулентног (27) струјања у претходни израз (28) долази се до

$$\alpha_{sr} = \left(\frac{\lambda}{L} \right) \left(0.332 \left(\frac{u_{\infty}}{v} \right)^{1/2} \int_0^{x_c} \frac{dx}{x^{1/2}} + 0.0296 \left(\frac{u_{\infty}}{v} \right)^{4/5} \int_{x_c}^L \frac{dx}{x^{1/5}} \right) Pr^{1/3} \quad (29)$$

$$\alpha_{sr} = \left(\frac{\lambda}{L} \right) Nu_{ekv} \quad (30)$$

$$Nu_{ekv} = \left(0.664 Re_{x_c}^{1/2} + 0.037 \left(Re_L^{4/5} - Re_{x_c}^{4/5} \right) \right) Pr^{1/3} \quad (31)$$

$$Nu_{ekv} = \left(0.037 Re_L^{4/5} - A \right) Pr^{1/3} \quad (32)$$

A представља константу која се израчунава из вредности критичног *Reynolds*-овог броја (вредности при којој долази до промене режима струјања флуида):

$$A = 0.037 Re_{x_c}^{4/5} - 0.664 Re_{x_c}^{1/2} \quad (33)$$

За $Re_{xc} = 5 \cdot 10^5$,

$$Nu_{ekv} = \left(0.037 Re_L^{4/5} - 871 \right) Pr^{1/3} \quad (34)$$

Рекапитулација: претходни израз важи за $60 > Pr \geq 0.6$ и $5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^8$, $Re_{xc} = 5 \cdot 10^5$.

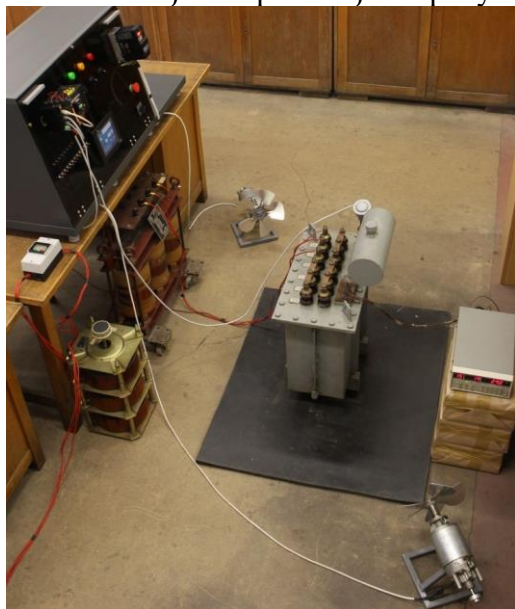
У случају да је $L \gg x_c$ ($Re_L \gg Re_{xc}$) вредност A се, због $A \ll 0.037 Re_L^{4/5}$, може занемарити. Дакле, за плоче код којих је почетни део са ламинарним струјањем много мањи од преосталог дела са турбулентним струјањем, приближно важи

$$Nu_{ekv} = 0.037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} \quad (35)$$

Турбулентно струјање може настати и при вредности Re_{xc} која је значајно нижа од $5 \cdot 10^5$, односно турбулентно струјање се чак може остварити по читавој површини плоче, уколико се поставе препреке, **изазивачи турбулентног струјања**. У том случају за коефицијент преласка топлоте струјањем се може користити израз (27) који важи за турбулентно струјање. У случају дужих путања флуида поред површи тела, потребно је поставити препреке на више места дуж правца струјања, како би се одржало турбулентно струјање на целој површи.

На вежбама ће бити урађен један пример који илуструје примену претходно датих израза.

Пример 1 – Оптерећење током рада трансформатора и температура амбијента (ϑ_a) су променљиви и доводе до променљивих губитака и снаге загревања (P_g). Примењује се регулација броја обртаја са циљем оптимизације снаге губитака (за веће брзине расте потрошња вентилатора, али се смањује температура намотаја, а последично и губици у њима) или одржавања температуре горњег уља (ϑ_{gu}), чиме се избегава "дисање трансформатора" (ширење и скупљање уља, при скупљању уља се ствара подпритисак и увлачи ваздух и у њему садржана влага). Променом броја обртаја мења се брзина струјања ваздуха, а самим тим и интензитет хлађења (коэффициент α), чиме се хлађење прилагођава тренутном оптерећењу и температури амбијента.



Приближна промена губитака (P_g) у намотајима при различитим струјним оптерећењима

I/I_n	1.6	1.4	1.2	1
P_g/P_{gn}	2.56	1.96	1.44	1

Пораст температуре горњег уља ($\vartheta_{gu} - \vartheta_a$) у односу на температуру амбијенталног ваздуха, при различитим брзинама обртања вентилатора

I/I_n	60Hz	52.5Hz	45Hz	37.5Hz	30Hz
1.6	31.1668	31.9828	35.3559	36.4301	38.1230
1.4	21.1198	23.4436	24.6667	27.0316	27.9988
1.2	15.3718	16.3251	18.3359	20.2059	21.0868
1	10.3330	11.7329	12.0629	13.4541	14.2828

Отпор преносу топлоте ($R^T \sim 1 / \alpha$), дефинисана као однос пораста температуре горњег уља и укупне снаге губитака у стационарним топлотним стањима, опада са променом броја обртаја вентилатора. Дакле, као што се и очекивало, при истој струји кроз трансформатор и истој температури амбијента, температура горњег уља ($\vartheta_{gu} = R^T P_g + \vartheta_a$) ће бити нижа при већој брзини вентилатора.

I/I_n	60Hz	52.5Hz	45Hz	37.5Hz	30Hz
1.6	28.8986	28.1369	25.1457	23.6714	21.3954
1.4	30.5402	28.1870	26.5817	24.2051	23.6791
1.2	29.6095	27.8168	25.6041	23.0433	22.0432
1	29.7629	26.7219	25.9382	22.9640	22.1872
Усредњено	29.7028	27.7157	25.8174	23.4710	22.3262

Детаљније на

http://term-procesi.etf.rs/dokumenti/istrazivanja/paper_13.pdf

http://term-procesi.etf.rs/dokumenti/istrazivanja/paper_14.pdf

Пример 2 - Природно струјање (температура флуида ϑ_∞) поред плоче константне температуре (ϑ_s):

$$\vartheta_f = \frac{\vartheta_s + \vartheta_\infty}{2}$$

$$\alpha = \frac{\lambda Nu}{L}$$

$$Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g \beta (\vartheta_s - \vartheta_\infty) L^3}{\nu \alpha}$$

За вертикалну плочу:

$$Nu_L = 0.68 + \frac{0.670 Ra_L^{0.25}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}}, \text{ за } Ra_L \leq 10^9$$

L - висина плоче

За хоризонталну плочу:

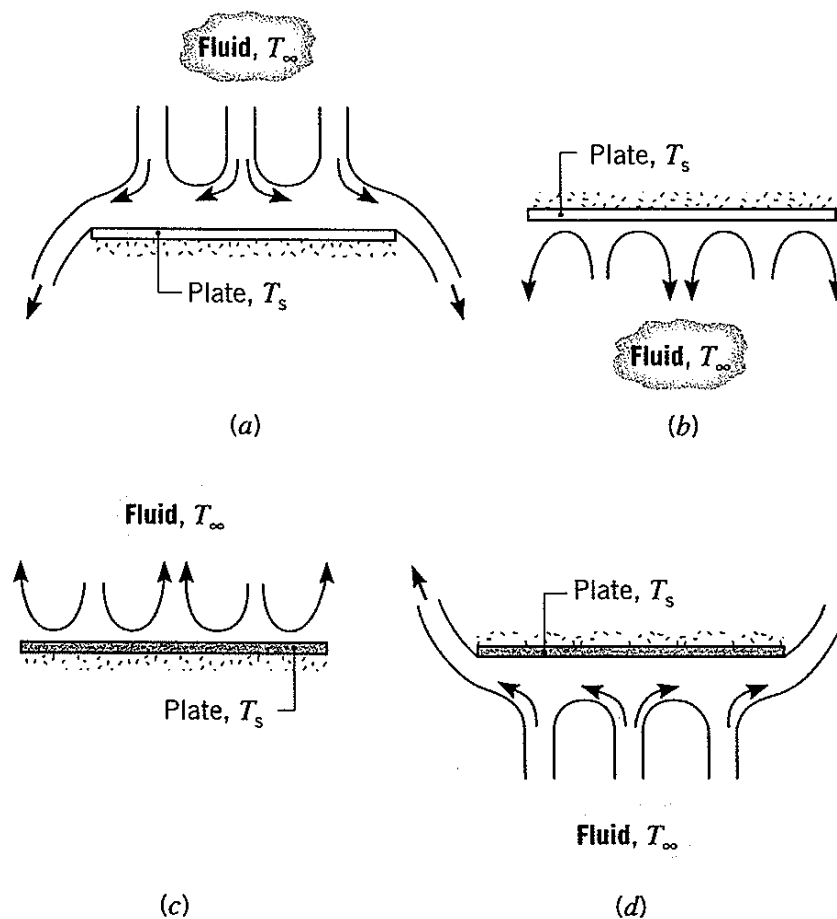


FIGURE 9.8
Buoyancy-driven flows on horizontal cold ($T_s < T_\infty$) and hot ($T_s > T_\infty$) plates: (a) top surface of cold plate, (b) bottom surface of cold plate, (c) top surface of hot plate, and (d) bottom surface of hot plate.

- в) утврђивањем степена апсорпције енергије зрачења која са околних тела долази до површи S посматраног тела
- г) просторном расподелом зрачења
- д) успостављањем поступака за утврђивање размене (тока) енергије између површи различитих температура
- ђ) фреквентном расподелом електромагнетских таласа који преносе енергију

С обзиром да размена топлоте зрачењем у великој мери зависи од карактеристика површи тела, погодно је увести референтно тело (површ), у односу на које се једноставно исказују карактеристике реалних површи. То референтно тело се назива црно тело и има следеће одлике:

- Било која површ која се налази на истој температури као референтно црно тело, зрачи мање енергије од црног тела. Са површи црног тела апсолутне температуре T_l (К) енергија се зрачи површинском густином снаге

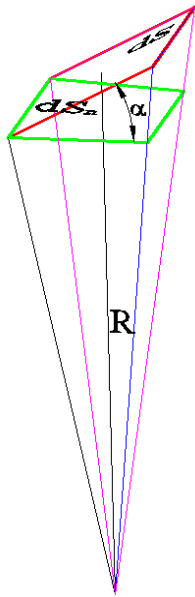
$$^c q_s = \sigma_c T_l^4 \quad (36)$$

($\sigma_c = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W / (m}^2 \text{ K}^4)$ – Штефан-Болцманова константа)

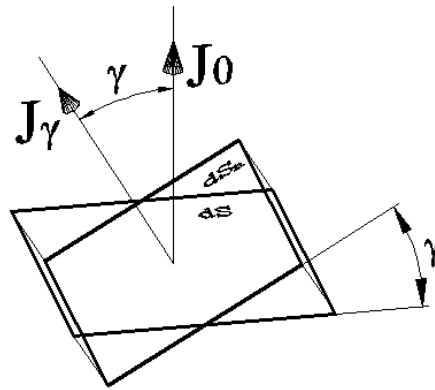
- Спектрална расподела снаге зрачења (електромагнетних таласа) референтног црног тела је описана *Planck*-овим законом зрачења ($^c q_{s\lambda}$ – површинска густина снаге на таласној дужини λ , $c_1 = 1.44 \cdot 10^{-2} \text{ m K}$, $c_2 = 0.369 \cdot 10^{-15} \text{ W m}^2$, T – апсолутна температура (К)):

$$^c q_{s\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad (37)$$

- Црном телу се приписује идеална дифузна просторна расподела снаге зрачења. Она се исказује преко величине „јачина зрачења“ (J_γ), која се дефинише као елементарна снага која се зрачи у елементарни просторни угао. Елементарни просторни угао под којим се из неке тачке види елементарна површ dS (слика 10) је једнак $d\omega = dS_n / R^2 = (dS \cos \alpha) / R^2$, где је dS_n површина површи dS пројектована на раван управну на потег од тачке посматрања до посматране површи dS .



Слика 10



Слика 11

Као идеална дифузна расподела се сматра расподела описана *Lambert*-овим законом:

$$J_{\gamma} = J_0 \cos \gamma \quad (38)$$

γ представља угао између правца у коме се посматра зрачење и нормале на површ, J_{γ} је јачина зрачења у правцу γ , а J_0 у правцу $\gamma = 0$ (слика 11).

Напомене:

У даљем тексту ће се користити и вредност $I_{\gamma, S}$, која представља количник јачине зрачења са елементарног дела површи и површине елементарне површи

$$I_{\gamma, S} = \frac{J_{\gamma}}{dS} \quad (39)$$

У литератури може срести и алтернативна дефиниција *Lambert*-овог закона (израз (38)):

$$J_0 / dS_n = J_{\gamma} / dS \text{ (видети слику 11).}$$

Угао γ се мења у границама $0, 90^\circ$; другим речима, површ зрачи само са једне стране, ка околини (видети слику 15).

- Сви електромагнетски таласи који стигну на површ црног тела се апсорбују, односно нема рефлексије таласа од површи црног тела.

Реалне површи преко којих тела размењују енергију зрачењем са околином имају особине које „одступају“ од наведених особина референтног црног тела. У највећем броју инжењерских проблема површи се могу посматрати као идеалне сиве површи. Једноставна веза између спектралне густине снаге зрачења сивог тела и спектралне густине снаге зрачења коју би имало референтно црно тело на истој температури гласи:

$$\varepsilon q_{s\lambda}(\lambda, T) = \varepsilon^c q_{s\lambda}(\lambda, T) \quad (40)$$

ε представља коефицијент сивоће (емисивност) сиве површи (сивог тела). Наравно, иста веза важи и за однос укупних снага, једнаким интегралу $q_{s\lambda}$ у читавом опсегу таласних дужина. Даље, реална апсорпциона својства се обично описују преко коефицијента апсорпције (A), који представља однос снаге апсорбоване од стране тела и укупне снаге којом се енергија доводи до површи. Подсетимо, овај коефицијент код црног тела, за било коју таласну дужину упадног зрачења, износи 1. У већини реалних инжењерских примена, коефицијент апсорпције је константан (не зависи од таласне дужине) и једнак је коефицијенту сивоће (једнакост $A = \varepsilon$ је једна од карактеристика идеалне сиве површи). Коначно, *Lambert*-ов закон описује и просторну расподелу јачине зрачења идеалног сивог тела.

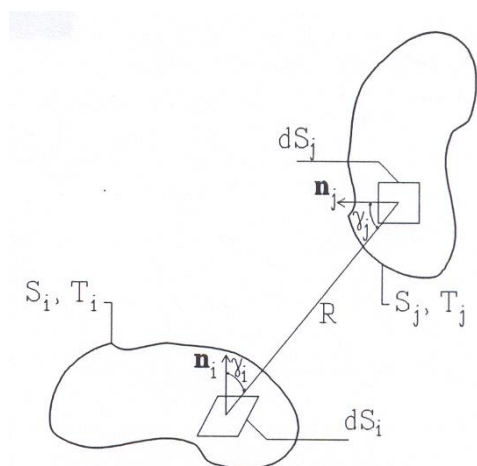
3.2. Фактор виђења

Са становишта примене у електроенергетици, најважнији резултат теорије преноса топлоте зрачењем је метода за израчунавање размене енергије између површи тела које се налазе на различитим температурама. Метода је заснована на "факторима виђења" и шемама зрачења. Поставка на којој је теорија изграђена је да површи тела зраче дифузно (по *Lambert*-овом закону).

"Фактор виђења" $F_{i \rightarrow j}$ се дефинише као однос снаге зрачења која са површи i стигне до површи j ($q_{i \rightarrow j}$) и укупне снаге зрачења које се емитује са површи i (q_i).

Снага која се са површи i преноси до површи j се одређује интеграцијом по површима S_i и S_j елементарних снага које се са елементарне површи тела i (dS_i) емитују до елементарне површи тела j (dS_j) (слика 12):

$$dq_{i \rightarrow j} = I_{\gamma_i} d\omega_{i \rightarrow j} = I_{\gamma_i, S} dS_i d\omega_{i \rightarrow j}, \quad (41)$$



$I_{\gamma_i, S}$ – количник јачине зрачења са елементарног дела површи (dS_i) у правцу који са нормалом заклапа угао γ_i и површине елементарне површи (dS_j),

dS_i и dS_j – површина елементарних површи тела i и j ,

$d\omega_{i \rightarrow j}$ – елементарни просторни угао под којим се са елементарне површи dS_i види елементарна површ dS_j и

R – растојање између елементарних површи dS_i и dS_j .

Слика 12

Након уврштавања вредности за елементарни просторни угао $d\omega_{i \rightarrow j} = dS_j \cos \gamma_j / R^2 = (dS_j \cos \gamma_j) / R^2$, долази се до

$$dq_{i \rightarrow j} = I_{\gamma_{i,S}} dS_i \frac{dS_j \cos \gamma_j}{R^2}, \quad (42)$$

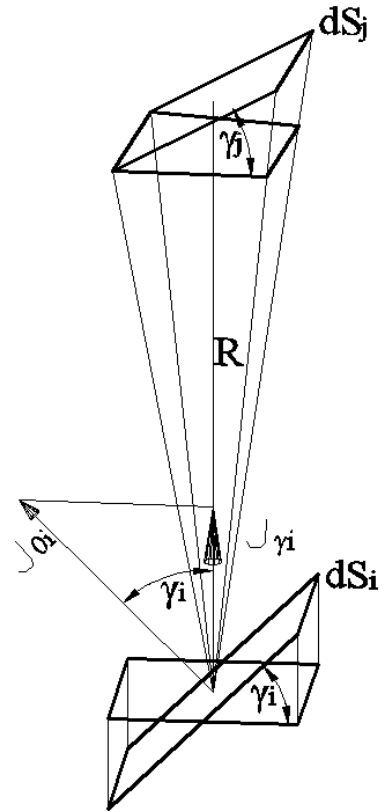
За случај да се расподела зрачења у полупростор са елементарног дела површи S_i врши по *Lambert*-овом закону (36),

$$I_{\gamma_{i,S}} = I_{0_{i,S}} \cos \gamma_j, \quad (43)$$

израз (42) постаје (слика 13)

$$dq_{i \rightarrow j} = I_{0_{i,S}} \cos \gamma_j dS_i \frac{dS_j \cos \gamma_j}{R^2}, \quad (44)$$

Слика 13



$I_{0_{i,S}}$ је једнака укупној површинској густини снаге (q_{si}) зрачења подељеној са π (овај израз је изведен у делу „Извођење изрази (45)“, који се налази у наставку текста, иза изрази (46)):

$$I_{0_{i,S}} = I_{0_{i,S}} \frac{q_{si}}{\pi}. \quad (45)$$

Заменом изрази за $I_{0_{i,S}}$ (45) у израз (44) долази се до:

$$dq_{i \rightarrow j} = \frac{q_{si}}{\pi} \cos \gamma_j dS_i \frac{dS_j \cos \gamma_j}{R^2} \quad (46)$$

$$dq_{i \rightarrow j} = q_{si} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_i dS_j. \quad (47)$$

Укупна снага преноса енергије од површи i ка површи j се добија интеграцијом изрази за елементарну снагу (47):

$$q_{j \rightarrow i} = q_{si} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_i dS_j \quad (48)$$

Вредност $q_{si} = \varepsilon \sigma_c T_i^4$ се може извући испред интеграла у случају да је температура по површи тела i константна.

Према дефиницији, "фактор виђења" се одређује према изразу

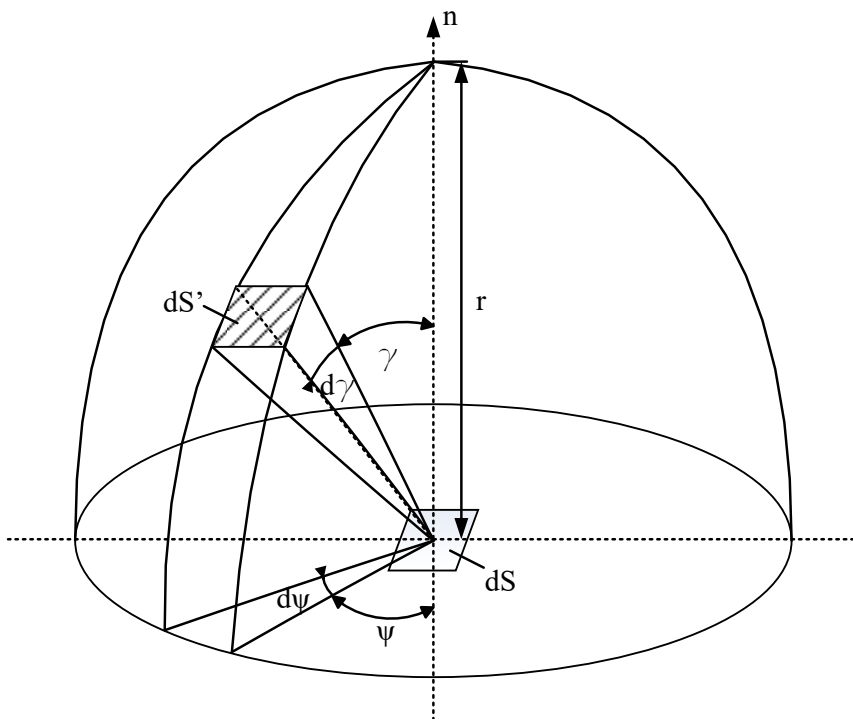
$$F_{i \rightarrow j} = \frac{q_{i \rightarrow j}}{q_i} = \frac{q_{i \rightarrow j}}{q_{si} S_i} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_i dS_j \quad (49)$$

Извођење израза (45):

Снага којом се са јединичне површине елементарне површи dS енергија зрачи кроз елементарни просторни угао $d\omega$, под којим се види елементарна површ dS' на полусфери (као што је приказано на слици И.1.), износи:

$$dq_{Si} = I_{\gamma i, S} \cdot d\omega \quad (\text{И.1.})$$

Просторни угао $d\omega$ под којим се из тачке у центру сфере види елементарна површ на полусфери полупречника r је једнак: $d\omega = dS'_n / r^2 = dS' / r^2 = (r \cdot \sin \gamma d\psi \cdot r \cdot d\gamma) / r^2 = \sin \gamma d\psi \cdot d\gamma$ (угао између потега полупречника и елементарне површи на полусфери је 90° , због чега је $dS'_n = dS'$).



Слика И.1.

Веза површинске густине снаге која се зрачи у полупростор са површи dS (q_{Si}) и јачине зрачења са јединичне површине елементарне површи у смеру нормале ($I_{0i, S}$), добија се површинском интеграцијом свих елементарних снага зрачења које се зраче у елементарне просторне углове $d\omega$ под којима се виде елементарне површи полусфере (границе интеграције су: од $\psi_1 = 0$ до $\psi_2 = 2\pi$ и од $\gamma_1 = 0$ до $\gamma_2 = \pi/2$; $\sin(2\gamma) = 2\sin(\gamma)\cos(\gamma)$):

$$q_{Si} = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi/2} I_{\gamma i, S} \cdot \sin \gamma \cdot d\psi \cdot d\gamma \quad (\text{И.2.})$$

$$q_{Si} = \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\gamma=0}^{\pi/2} I_{0i, S} \cdot \cos \gamma \cdot \sin \gamma \cdot d\gamma \quad (\text{И.3.})$$

$$q_{Si} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} I_{0i,S} \cdot \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos \pi) = \pi \cdot I_{0i,S} \quad (\text{И.4.})$$

Са површи црног тела температуре T енергија се зрачењем, према *Stefan-Boltzman*-овом закону (36), одводи површинском густином снаге

$$q_{Si} = C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (\text{И.5.})$$

Из претходне две једначине, (И.4.) и (И.5.), долази се до

$$I_{0i,S} = \frac{1}{\pi} \cdot q_{Si} = \frac{1}{\pi} \cdot C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (\text{И.6.})$$

<<<< =====>>>>

Користећи исти поступак коришћен за добијање израза (49), за "фактор виђења" $F_{j \rightarrow i}$ се долази до:

$$F_{j \rightarrow i} = \frac{1}{S_j} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{R^2 \pi} dS_i dS_j \quad (50)$$

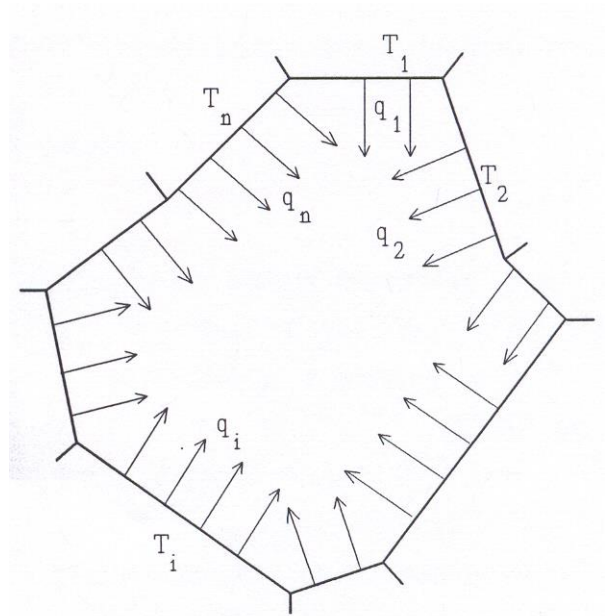
одакле се долази до важне релације између "фактора виђења"

$$S_i F_{i \rightarrow j} = S_j F_{j \rightarrow i} \quad (51)$$

Када n површи произвољног облика образују затворен простор, као на пример на слици 14, према дефиницији "фактора виђења" и закону одржања енергије могу се за сваку од површи поставити једнакости

$$\sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} = 1, i = \overline{1, N} \quad (52)$$

Слика 14



"Фактор виђења" F_{ii} има вредност нула за равне и конвексне (испупчене) површи. За конкавне, његова вредност већа је од нуле. Ако затворену

површ ограничава N површи, укупно постоји N^2 "фактора виђења". Наведена два правила, дата изразима (51) и (52), омогућавају да директно (користећи дефинициони интеграл) не мора да се одређује свих N^2 , већ само

$$N^2 - \frac{N(N-1)}{2} - N = N^2 - \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} - N = \frac{N(N-1)}{2} \quad (53)$$

"фактора виђења".

"Фактори виђења" се могу одредити на следеће начине: а) аналитичко решавање дефиниционог интеграла (за неке елементарне случајеве), б) нумеричку интеграцију помоћу *Matchad* програма, на пример, при чему се двоструки просторни интеграл претвара у четвороструки

линијски интеграл, код кога се углови γ_1 и γ_2 и растојање R исказују преко 4 линијске координате, в) према изведеним правилима (51) и (52) и г) формулама које се могу наћи у литератури за неке карактеристичне геометрије.

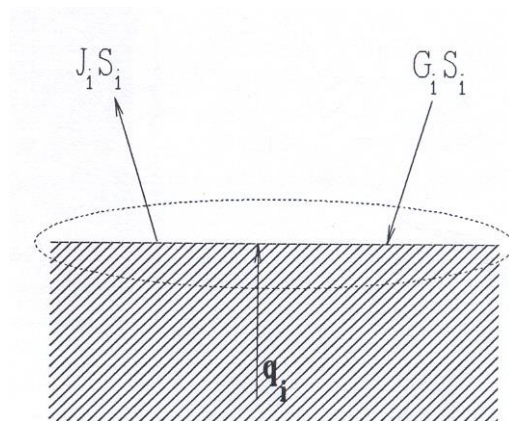
У наставку текста се приказује теоријска основа радијационих шема, намењених одређивању тока размене енергије између N површи које се налазе на различитим температурама и које образују затворен простор.

3.3. Радијационе шеме

Посматрајмо једну површ тела (површине S_i), са које се зрачењем одводи енергија снагом $J_i S_i$, а на њу доводи снагом $G_i S_i$ (са површи осталих тела са којима се енергија размењује зрачењем) - слика 15.

Да би се одржало такво стационарно стање, до површи је из унутрашњости тела потребно доводити енергију снагом

$$q_i = S_i(J_i - G_i). \quad (54)$$



Слика 15

Површинска густина снаге којом се енергија одводи са површи тела се састоји од две компоненте. Прва компонента, E_i , је одређена основним законом зрачења површи чија је температура, T_i , већа од апсолутне нуле. Друга компонента је рефлектована компонента упадног зрачења (коэффициент рефлексije ρ_i). Дакле,

$$J_i = E_i + \rho_i G_i. \quad (55)$$

Између коэффицијената апсорпције и рефлексije постоји веза $A_i = 1 - \rho_i$ (не третира се трансмисија). Из (54) и (55) се може написати следећи израз за површинску густину снаге q_i :

$$q_i = S_i((E_i + \rho_i G_i) - G_i) = S_i((E_i - (1 - \rho_i) G_i)) = S_i(E_i - A_i G_i). \quad (56)$$

Потребно је формирати систем једначина (и њему одговарајућу еквивалентну радијациону шему) из кога се, на основу дефинисаних улазних величина (познатих температура површи T_i или познатих снага q_i) одређују непознате вредности температура површи и снага q_i . У енергетском билансу (54) се појављују две променљиве (J_i и G_i), од којих је једну од њих могуће исказати преко друге, коришћењем израза (55): у изразу (56) је J_i исказано преко G_i , а изразима који следе G_i ће бити исказано преко J_i . За идеално сиво тело коэффицијента сивоће ε_i , који је једнак коэффицијенту апсорпције A_i ($\varepsilon_i = A_i = 1 - \rho_i$), израз (55) се може написати (узимајући у обзир законитост дату изразом (37)) у форми

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + (1 - \varepsilon_i) G_i, \quad (57)$$

где је E_{bi} површинска густина снаге зрачења црног тела чија је температура једнака температури посматране површи ($E_{bi} = \sigma_c T_i^4$). Решавањем претходне једначине по G_i и заменом у (54), добија се

$$q_i = S_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1 - \varepsilon_i} \right), \quad (58)$$

односно

$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}}. \quad (59)$$

Ова једнакост се може приказати елементом мреже приказаним на слици 16.

За површ i ($i = 1, 2, \dots, N$) непознате су три величине, а за сада постоји само једна једначина, једначина (59). Слично као у електричним колима, где је потребно задати параметре напонске и струјне генераторе у колу, да би се одредиле вредности снага и температура, потребно је дефинисати скуп који садржи N вредности снага q_i или температура T_i , односно N од $2N$ вредности q_i или E_{bi} ; $i = 1, 2, \dots, N$. „Недостајућих“ N једначина се поставља преко укупне снаге зрачења која до сваке од површи ($i = 1, 2, \dots, N$) стиже до површи i ($S_i G_i$), исказане као збир снага које на сваку од површи i стижу од површи j ($j = 1, 2, \dots, i, \dots, N$)

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^N F_{j \rightarrow i} S_j J_j \quad (60)$$

односно

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} S_i J_j \quad (61)$$

Скраћивањем површина S_i у претходном изразу и сменом тако добијеног израза за G_i у израз (54), добија се

$$q_i = S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} J_j \right). \quad (62)$$

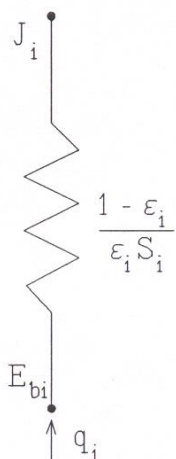
односно, применом (49),

$$q_i = S_i \left(\sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} J_i - \sum_{j=1}^N F_{i \rightarrow j} J_j \right). \quad (63)$$

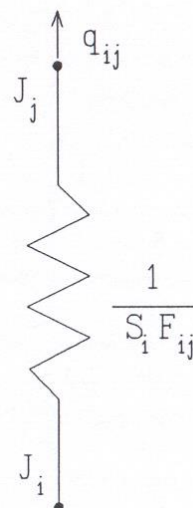
Дакле,

$$q_i = \sum_{j=1}^N S_i F_{i \rightarrow j} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^N q_{i \rightarrow j}, \quad (64)$$

што значи да је снага којом се енергија доводи површи i (q_i) једнака збиру снага размене топлоте између површи i и сваке од преосталих површи (снага размене енергије између површи i и неке од преосталих површи има позитиван предзнак ако се преноси од површи i). Размена енергије између површи i и сваке од преосталих површи се може приказати елементом мреже приказаним на слици 17.



Слика 16

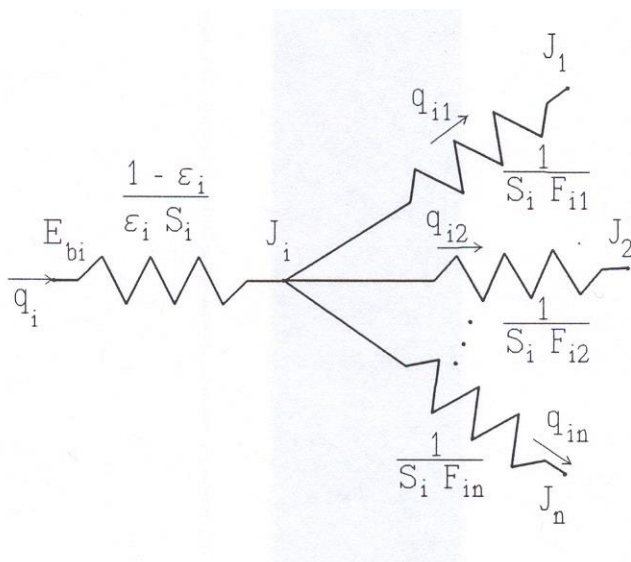


Слика 17

Из једначина (59) и (64) добија се

$$\frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}} = \sum_{j=1}^N \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{S_i F_{i \rightarrow j}}} \quad (65)$$

На основу ове једнакости може се нацртати мрежа која одговара енергетском билансу једне површи. Она је приказана на слици 18.



Слика 18

Следећи ове принципе и за остале површи, могуће је формирати комплетну отпорну мрежу и на бази ње одредити жељене вредности (за решавање је потребно задавање довољног броја температура површи T_i , што значи задавање E_{bi} ($E_{bi} = \sigma_c T_i^4$) или снага q_i које се провођењем доводе од унутрашњости тела до граничне површи). Практично, постоји $3N$ непознатих (q_i , E_{bi} , J_i ,

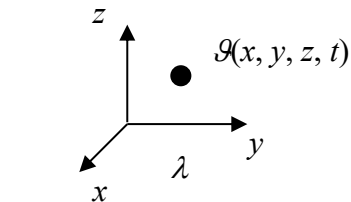
$i = 1, 2, \dots, N$), за које се на описани начин (коришћењем описане радијационе шеме) поставља $2N$ једначина, а N вредности (T_i или q_i) мора бити задато као улазна величина.

4. Пренос топлоте провођењем

4.1. Основне једначина

1) *Fourie* – ов закон

$$\vec{q}_s = -\lambda \text{ grad } \vartheta \quad (66)$$



$\vec{q}_s$ - површинска густина снаге провођења (W / m²)

λ - специфична топлотна проводност (W / m K)

2) Општа једначина температурног поља за $\lambda = \text{const.}$

$$q_v = \rho c_p \frac{d\vartheta}{dt} + \lambda \Delta \vartheta \quad (67)$$

ρ Густина (kg / m³)

c_p Специфични масени топлотни капацитет (J / (kg K))

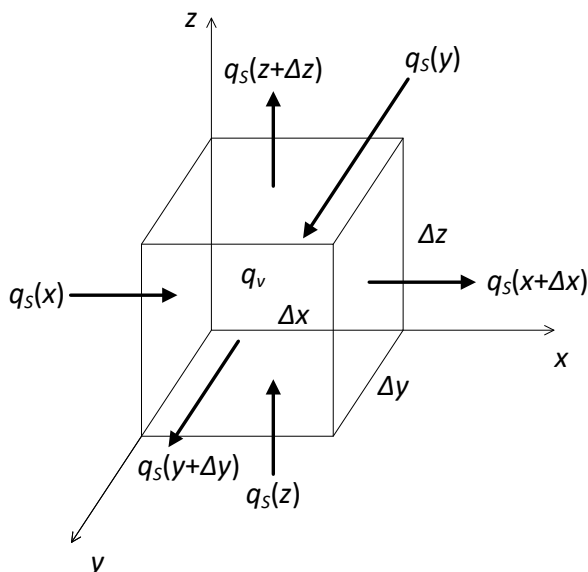
$$\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$$

$\lambda \Delta \vartheta$ Запреминска густина снаге којом се енергија одводи преносом топлоте провођењем

q_v Запреминска густина генерисане снаге (W / m³)

$\rho c_p \frac{d\vartheta}{dt}$ Запреминска густина снаге акумулисања енергије

Општа једначина температурног поља је у ствари исказ закона о одржању енергије:



Слика 19 – Приказ у *Descartes*-овом координатном систему

$$P_g = q_v \Delta x \Delta y \Delta z \quad (68)$$

$$P_{ak} = \rho c_p \Delta x \Delta y \Delta z \frac{d\vartheta(x,y,z,t)}{dt} \quad (69)$$

$$P_{izl} = (q_{Sx+\Delta x} \Delta y \Delta z + q_{Sy+\Delta y} \Delta x \Delta z + q_{Sz+\Delta z} \Delta x \Delta y) - (q_{Sx} \Delta y \Delta z + q_{Sy} \Delta x \Delta z + q_{Sz} \Delta x \Delta y) \quad (70)$$

q_λ представља површинску густину снаге преноса топлоте провођењем, при чему индекси који следе означавају њене компоненте (у правцу x , y и z осе) на специфицираним координатама по појединим осама

$$P_{izl} = (q_{Sx+\Delta x} - q_{Sx}) \Delta y \Delta z + (q_{Sy+\Delta y} - q_{Sy}) \Delta x \Delta z + (q_{Sz+\Delta z} - q_{Sz}) \Delta x \Delta y \quad (71)$$

$$q_{Sx+\Delta x} - q_{Sx} = \Delta q_{Sx} = \frac{\partial q_{Sx}}{\partial x} \Delta x; q_{Sy+\Delta y} - q_{Sy} = \Delta q_{Sy} = \frac{\partial q_{Sy}}{\partial y} \Delta y; q_{Sz+\Delta z} - q_{Sz} = \Delta q_{Sz} = \frac{\partial q_{Sz}}{\partial z} \Delta z \quad (72)$$

$$P_{izl} = \frac{\partial q_{Sx}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_{Sy}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_{Sz}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (73)$$

Полазећи од *Fourie* – овог закона, чији је векторски облик дат једначином (66),

$$q_{Sx} = -\lambda \frac{\partial \vartheta(x,y,z)}{\partial x}; q_{Sy} = -\lambda \frac{\partial \vartheta(x,y,z)}{\partial y}; q_{Sz} = -\lambda \frac{\partial \vartheta(x,y,z)}{\partial z},$$

долази се до

$$\frac{\partial q_{Sx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial \vartheta(x,y,z,t)}{\partial x} \right); \frac{\partial q_{Sy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\lambda \frac{\partial \vartheta(x,y,z,t)}{\partial y} \right); \frac{\partial q_{Sz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial \vartheta(x,y,z,t)}{\partial z} \right) \quad (74)$$

Ако је материјална средина линеарна ($\lambda = \text{const.}(x, y, z)$):

$$P_{izl} = \left(-\lambda \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial x^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \left(-\lambda \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial y^2} \right) \Delta y \Delta x \Delta z + \left(-\lambda \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right) \Delta z \Delta x \Delta y \quad (75)$$

$$P_{izl} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (76)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \vartheta(x,y,z,t) = \Delta \vartheta(x,y,z,t) \quad (77)$$

Δ - Лапласов оператор (дивергенција градијента скаларне величине), ∇ - Набла оператор

Дакле, из

$$P_g = P_{ak} + P_{izl} \quad (78)$$

долазимо до

$$q_v = \rho c_p \frac{d\vartheta(x,y,z,t)}{dt} - \lambda \Delta \vartheta(x,y,z,t) \quad (79)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right) + q_v = \rho c_p \frac{d\vartheta(x,y,z,t)}{dt} \quad (80)$$

У општем случају, λ није константно, тако да из једначина (69) и (70) не следи једначина (71), као ни једначине које следе после израза (71). Општа температурна једначина за нелинеарну топлотну средину ($\lambda = \text{var.}$), у *Descartes*-овом координатном систему $\vartheta(x, y, z)$ гласи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (81)$$

У цилиндричном $\vartheta(r, \varphi, z)$ и сферном $\vartheta(r, \phi, \theta)$ координатном систему:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (82)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (83)$$

Изрази (81) – (83) важе за чврсто тело, док се у случају флуида јавља још једна компонента, која је последица кретања флуида (брзином u) и преноса енергије који је последица кретања масе. Конвективно-дифузна једначина којом се описује промена температуре у току кретања флуида гласи

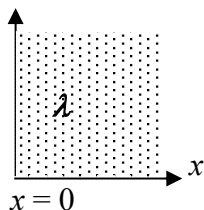
$$\rho c_p \frac{\partial \vartheta(t, X)}{\partial t} + \rho c_p u(t, X) \cdot \nabla \vartheta(t, X) + \nabla(-\lambda \nabla \vartheta(t, X)) = Q$$

4.2. Гранични услови

Да би се одредила расподела температуре унутар чврстог тела потребно је поставити граничне и почетне услове.

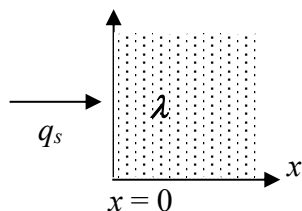
Типови граничних услова (на примеру *Descartes*-ов координатног система; посматра се лева гранична површ тела)

Тип граничног услова 1: $\vartheta(0, t) = \vartheta_p$



Слика 20

Тип граничног услова 2:



Слика 21

Ка граничној површи се енергија од околине преноси површинском густином снаге q_s (W / m^2)

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0,t} = q_s \quad (84)$$

Тип граничног услова 3:

Изолована гранична површ

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = 0 \quad (85)$$

Тип граничног услова 4:

На граничној површи долази до преноса топлоте струјањем

- **прелазак топлоте са флуида на тело**

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = \alpha'(\vartheta_f - \vartheta(0, t)) \quad (86)$$

α' представља коефицијент преласка топлоте струјањем са флуида на површ тела ($W / (m^2 K)$)

- **прелазак топлоте са површи тела на флуид**

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = \alpha''(\vartheta(0, t) - \vartheta_f) \quad (87)$$

α'' представља коефицијент преласка топлоте струјањем са површи тела на флуид ($W / (m^2 K)$)

$\alpha': \vartheta_f > \vartheta(0, t); \alpha'': \vartheta(0, t) > \vartheta_f$

Тип граничног услова 5:

Тело преко граничне површи размењује енергију са околином зрачењем – случај да се енергија зрачењем одводи са површи тела, и то за конфигурацију да се површ тела налази у слободном простору (температуре T_a)

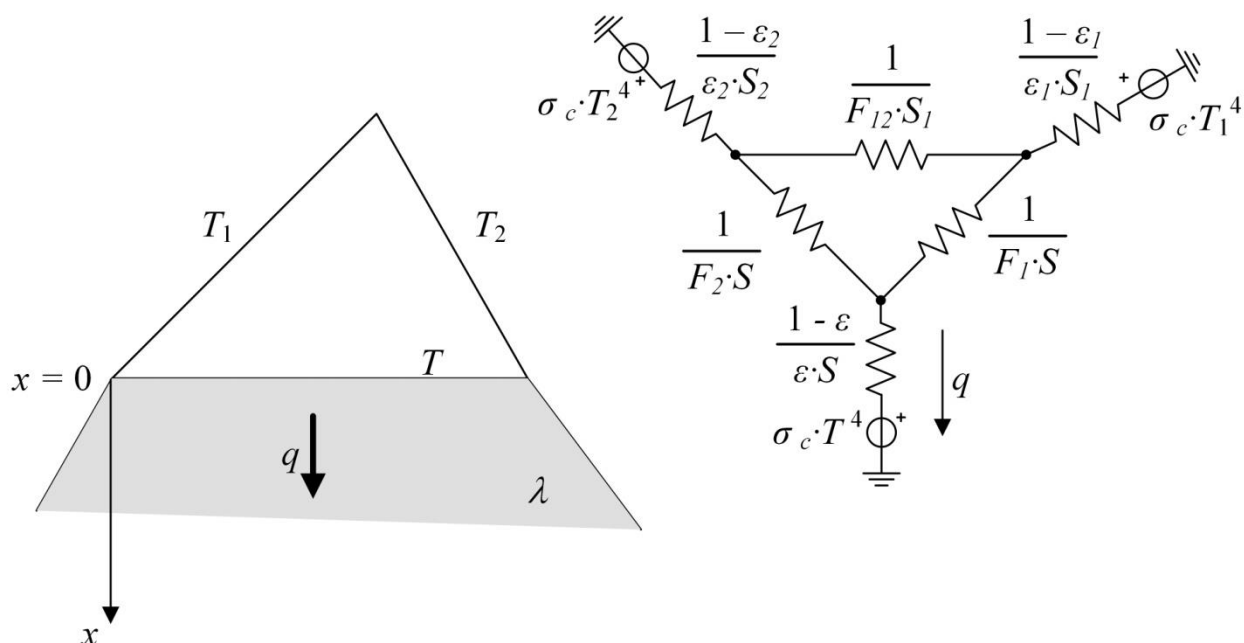
$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = \varepsilon \sigma_c (T(0, t)^4 - T_a^4) \quad (88)$$

$$T = \vartheta + 273.16 \quad (89)$$

T_a – апсолутна температура амбијента (K)

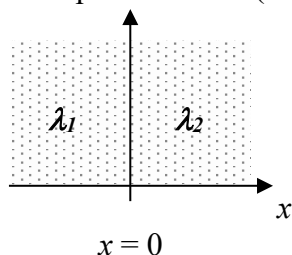
У случају да се у околини тела налази више других тела чије се температуре површи разликују од T_a , размена енергије се одређује применом радијационих шема објашњених у Поглављу 4.

На следећој слици је дат пример где гранична површ тела (температуре ϑ односно T) зрачењем размењује топлоту са површима температуре T_1 и T_2 . Површи површина износе S , S_1 и S_2 , а фактори виђења: површи 1 са површи тела F_1 , површи 2 са тела F_2 и површи 2 са површи 1 F_{12} .



Тип граничног услова 6:

Тело (специфичне топлотне проводности λ_1) преко граничне површи размењује енергију са другим чврстим телом (специфичне топлотне проводности λ_2).



Слика 22

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t} \quad (90)$$

Диференцијална једначина преноса топлоте у слоју специфичне топлотне проводности λ_1 и слоју топлотне проводности λ_2 се постављају и решавају независно. За граничну површ између ових слојева се поставља гранични услов, који се примењује за одређивање интеграционих константи у изразима за слој 1 и за слој 2.

Гранични услов за размену топлоте струјањем и зрачењем:

У техничким системима је реална ситуација да гранична површ са околином размењује топлоту и струјањем и зрачењем, када се гранични услов исказује као комбинација граничних услова типа 4 и 5.

Наведене једначине преноса топлоте провођењем се могу аналитички решити за мали број, могло би се рећи специјалних, случајева. Готово по правилу, за решавање практичних проблема је потребно формирати и нумерички решити систем диференцијалних једначина, при чему се

дискретизација за стационарне проблеме врши по простору, а за прелазне топлотне режиме и по простору и по времену.

4.3. Аналитичко решавање једначина

Аналитичко решавање једначина је могуће у следећим случајевима:

Једнодимензионални стационарни пренос топлоте:

Написано у правоугаоном координатном систему: $\mathcal{Q} = f(x) = \text{const.}(y, z, t)$

Прелазни (нестационарни) процеси преноса топлоте при којима се вредност температуре не мења по запремини тела

Написано у правоугаоном координатном систему: $\mathcal{Q} = f(t) = \text{const.}(x, y, z)$

Аналитичко решења дводимензионалних стационарних температурних поља

Нешто компликованијим математичким поступцима раздвајања променљивих могуће је доћи и до аналитичких решења дводимензионалних стационарних температурних поља; написано у правоугаоном координатном систему: $\mathcal{Q} = f(x, y) = \text{const.}(z, t)$; поступци се могу наћи у литератури

4.4. Дискретизација и нумеричко решавање једначина

Топлопроводна средина се дели на одређен број делова за које се претпоставља да имају константну температуру по својој запремини; за сваки од делова се поставља једначина енергетског биланса – генерисање топлоте и размена са суседним деловима и са околином, а за нестационарне процесе и акумулисање топлоте

Решавање система једначина написаних на основу поделе топлопроводне средине на мали број делова (реда величине неколико десетина)

а) Аналитичко решавање скупа алгебарских једначина (за стационарне топлотне режиме) или диференцијалних једначина (за прелазне топлотне процесе)

Предност: Добијају се експлицитни аналитички изрази временске / просторне промене температуре, што може да олакша квалитативне процене

Мана и ограничење: само за мали број једначина, односно грубу поделу топлопроводне средине, због чега је и тачност ограничена.

Напорно за реализацију, без већег значаја у савремено рачунарско доба

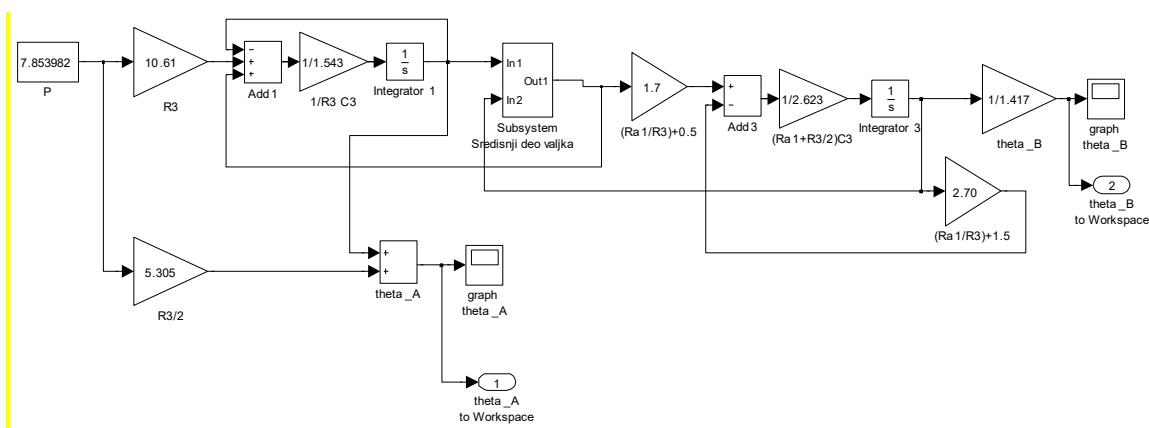
б) Решавање система једначина применом нумеричких метода – у програмима написаним у „класичним“ програмским језицима ово се своди на употребу различитих метода / функција које постоје у оквиру самог програмског језика или у оквиру библиотека које је једноставно могуће додати у свој програм.

Било „у моди“ 70-тих, 80-тих година прошлог века (програмски језик FORTRAN). Ова могућност је актуелна и данас у случају када се пише сопствени програм намењен пројектовању електроенергетске компоненте. Примера ради, у C# програмском језику и библиотекама које су доступне постоје различите нумеричке методе, као што су методе за операције над матрицама. Оне су део неке од бројних *open-source* библиотека (на пример *DotNumerics*), део неке од библиотека које се добијају уз неке *Microsoft* програме (на пример *Excel*) или део неке од комерцијалних библиотека). Поред тога, постоје и библиотеке намењене креирању корисничког интерфејса (на пример *WPF Toolkit*)

в) Решавање система једначина применом наменских програма

Релативно јефтини (реда величине неколико хиљада евра) симулациони рачунарски програми. Програми служе углавном за симулацију прелазних (динамичких) процеса. Систем диференцијалних једначина се задаје преко блок дијаграма.

Карактеристика: једноставни за коришћење – није потребно велико знање нумеричке анализе; алгоритми за решавање система једначина су садржани у овим наменским програмским пакетима; удобни улазни и излазни кориснички интерфејси.



Слика 23 – Пример изгледа симулационог рачунарског модела

Решавање једначина написаних на основу поделе топлопроводне средине на велики број делова (реда величине неколико десетина хиљада).

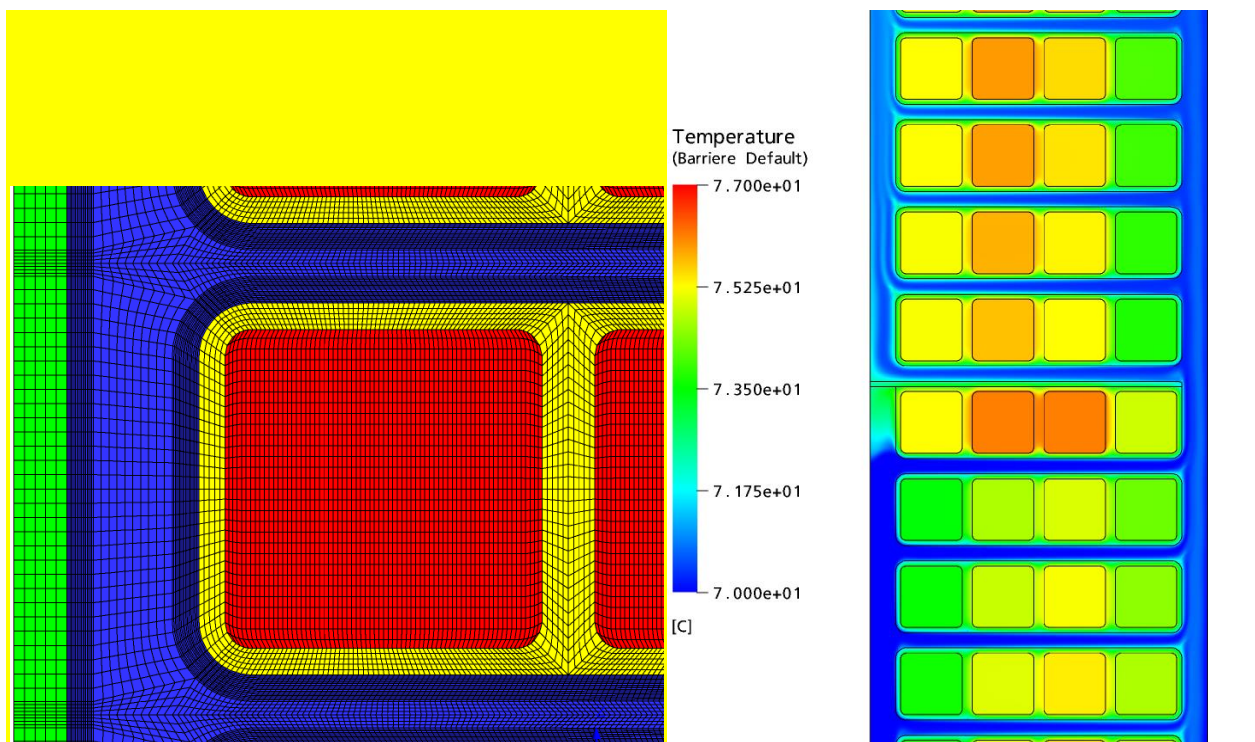
- То су скупљи програми (цена за комерцијалну лиценцу је реда величине неколико десетина хиљада евра) и базирани су, на пример, на методи коначних елемената (FEM - finite element method). Као улази у ове програме се задају геометрија и параметри

материјала, мрежа која дефинише дискретизацију простора и гранични услови. Уобичајено, постоји посебан Heat transfer модул, код кога се гранични услови задају на начин описан у претходном тексту. У том случају коефицијенти преласка топлоте се одређују коришћењем неке од формула доступних у литератури за анализирану геометрију и начин хлађења. Друга могућност је да се, поред Heat transfer модула, користи и CFD - Computational Fluid Dynamics модул, којим се моделује и кретање флуида поред граничне површи и одређују локалне вредности коефицијента преласка топлоте струјањем на површи додира тела и флуида.

Предност: добијање детаљне расподеле температуре (није увек неопходно, али може да буде врло корисно – пример приказан на слици 24).

Мане: скупи програми, непогодни за примену у пројектовању, јер једно израчунавање може да траје и више дана, тешкоће са конвергенцијом, поготову када се користе FEM модули и за Heat transfer и за CFD.

Интересантна примена оваквих софтвера је да „замене“ експериментална истраживања, јер се детаљно улази у микро појаве у материји. Овакви прорачуни су од интереса за пренос топлоте кроз чврсту материју (пример ће бити приказан на лабораторијским вежбама), али и за изучавање хидрауличких појава (расподеле протока расхладног флуида по каналима за хлађење) и преноса топлоте струјањем. Применом оваквих прорачуна се може доћи до формула које се користе при формирању термо-хидрауличких модела електро-енергетских компоненти, чијом се применом одређују протоци флуида кроз сваки од канала за хлађење и температуре сваког проводника.



Слика 24 – Пример дефинисања мреже (лево) и израчунате расподеле температура проводника и расхладног уља

4.5. Алтернативне методе

Графичка метода, која се базира на цртању изотермичких и линија топлотног флукса, пратећи правило да се формирају „криволинијски квадрати“ – да изотермичке и линија топлотног флукса буду ортогоналне и да збир наспрамних страница формираних фигура буде једнак.

Карактеристика: приближна метода, погодна за добијање оријентационих вредности, евентуално може бити корисна за дефинисање почетне итерације при нумеричком решавању система једначина постављених за просторно дискретизовану материјалну средину.

Коришћење континуалних и дисконтинуалних електричних аналогних модела

Код континуалних, преко електричног модела се долази до изотермичких линија (ове су аналогне еквипотенцијалним) – допуна графичкој методи.

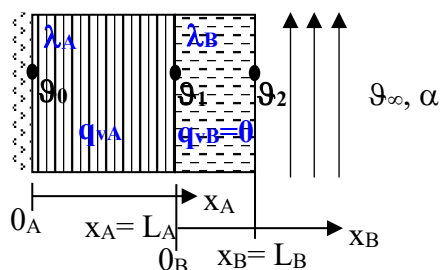
Код дисконтинуалних, мерења не електричном аналогном колу уместо решавања једначина постављених након просторне и временске дискретизације.

Карактеристика: без нарочитог практичног значаја; могло би се рећи да више има „музејски“ (историјски) значај; евентуално за едукативне сврхе – поготову за студенте електротехнике

4.6. Примери аналитичког решавања једначина

Пример – Једнодимензионални стационарни пренос топлоте

Задатак 4 из Збирке (скицираће се решење другачије од оног из Збирке)



Слика 25

Познато: карактеристике материјала, димензије, температура флуида (ϑ_∞), запреминска густина снаге генерисања топлоте q_{vA} , коефицијент преласка топлоте са зида на флуид α ; лева површ је идеално топлотно изолована

Тражи се: температуре површи ϑ_0 , ϑ_1 и ϑ_2

Општа температурна једначина за линеарну топлопроводну средину,

$$q_v = \rho c_p \frac{d\vartheta(x,y,z,t)}{dt} - \lambda \Delta \vartheta(x,y,z,t) \quad (91)$$

за стационарно топлотно стање и Descartes-ов координатни систем, за слојеве А и В гласи:

$$q_{vA} = -\lambda_A \frac{\partial^2 \vartheta_A(x_A)}{\partial x_A^2} \quad (92)$$

$$\lambda_B \frac{\partial^2 \vartheta_B(x_B)}{\partial x_B^2} = 0 \quad (93)$$

Опште решење ових једначина гласи:

$$\vartheta_A(x_A) = -\frac{q_{vA}}{\lambda_A} \frac{x_A^2}{2} + c_{1A}x_A + c_{2A} \quad (94)$$

$$\vartheta_B(x_B) = c_{1B}x_B + c_{2B} \quad (95)$$

Гранични услови:

$$\left(\frac{d\vartheta_A}{dx_A} \right)_{x_A=0} = 0 \quad (96)$$

$$\vartheta_A(x_A = L_A) = \vartheta_B(x_B = 0) \quad (97)$$

$$-\lambda_A \left(\frac{d\vartheta_A}{dx_A} \right)_{x_A=L_A} = -\lambda_B \left(\frac{d\vartheta_B}{dx_B} \right)_{x_B=0} \quad (98)$$

$$-\lambda_B \left(\frac{d\vartheta_B}{dx_B} \right)_{x_B=L_B} = \alpha (\vartheta_B(x_B = L_B) - \vartheta_\infty) \quad (99)$$

$$\text{Из (96): } c_{1A} = 0 \quad (100)$$

$$\text{Из (97): } -\frac{q_v}{\lambda_A} \frac{L_A^2}{2} + c_{2A} = c_{2B} \quad (101)$$

$$\text{Из (98): } \lambda_A \frac{q_v}{\lambda_A} L_A = -\lambda_B c_{1B} \quad (102)$$

$$\text{Из (99): } -\lambda_B c_{1B} = \alpha(c_{1B} L_B + c_{2B} - \vartheta_\infty) \quad (103)$$

$$\text{Из (98): } c_{1B} = -\frac{q_v L_A}{\lambda_B} \quad (104)$$

$$\text{Из (99): } c_{2B} = \frac{\lambda_B}{\alpha} \frac{q_v L_A}{\lambda_B} + \frac{q_v L_A}{\lambda_B} L_B + \vartheta_\infty = \frac{q_v L_A}{\lambda_B} \left(L_B + \frac{\lambda_B}{\alpha} \right) + \vartheta_\infty \quad (105)$$

$$\text{Из (97): } c_{2A} = \frac{q_v L_A^2}{2\lambda_A} + \frac{q_v L_A}{\lambda_B} \left(L_B + \frac{\lambda_B}{\alpha} \right) + \vartheta_\infty \quad (106)$$

Вредности тражених температура:

$$\vartheta_2 = c_{1B} L_B + c_{2B} \quad (107)$$

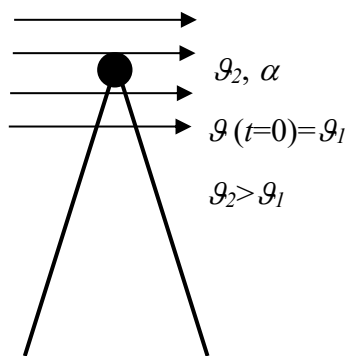
$$\vartheta_1 = c_{2B} \quad (108)$$

$$\vartheta_0 = c_{2A} \quad (109)$$

Пример – Прелазни процеси код којих се може занемарити просторна промена температуре

Овакви типови проблема се решавају користећи закон одржања енергије, примењен на затворен систем (2.1.1.) и на граничне површи (2.1.3.). Снага којом се енергија одводи из запремине (P_{izl}), која се користи у енергетском билансу за затворен систем, једнака је снази којом се енергија преноси ка граничној површи (P_{kas}) у енергетском билансу за граничне површи. Снага P_{kas} се одређује из енергетског биланса за граничну површ, односно једнака је снази којом се енергија одводи од граничне површи ка околини (P_{ods}).

Пример – Задатак 33 из Збирке:



Слика 26

Познато: карактеристике материјала, димензије, температура флуида чија се температура мери (ϑ_2), коефицијент преласка топлоте са флуида на тело (сензор) α ; почетна температура сензора који се поставља у струју флуида (ϑ_1)

Тражи се: временска промена температуре сензора

Снага генерисане топлоте у изотермичкој запремини: 0

Снага којом се топлотна енергија акумулише у изотермичкој запремини: $\rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt}$

Снага којом се топлотна енергија са флуида преноси ка сензору (сензор се посматра као изотермичка запремина): $\alpha S(\vartheta_2 - \vartheta)$; дакле, снага преноса топлоте од запремине ка околини, кроз граничну површ, износи $P_{izl} = -\alpha S(\vartheta_2 - \vartheta)$

Дакле, из енергетског биланса,

$$P_g = P_{ak} + P_{izl} \quad (110)$$

долази се до

$$\rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha S(\vartheta_2 - \vartheta) \quad (111)$$

... даље је лако ... елементарна математика ... решење:

$$\vartheta(t) = \vartheta_2 - (\vartheta_2 - \vartheta_1) e^{-\frac{t}{\rho V c_p / \alpha S}} \quad (112)$$

4.7. Критеријум за свођење реалних случајева на идеализовани случај да је запремина изотермичка

Критеријум за упрошћење је да је отпор преносу топлоте провођењем кроз запремину много мањи од топлотног отпора преласку топлоте са граничне површи на околину.

Дефиниција топлотног отпора:

Топлотни отпор преносу топлоте је једнак односу разлике температура (две површи, површи и флуида, два флуида) и снаге размене топлоте између ових површи / флуида. Дефиниција важи под претпоставком стационарног топлотног стања и да у околини површи / флуида између којих се дефинише топлотни отпор не постоје извори топлоте.

Однос отпора преносу топлоте провођењем кроз запремину и отпора преласку топлоте на граничној површи се у литератури назива *Biot*-ов број. *Biot*-ов број има различите форме за различите геометрије. Примера ради, за раван хомоген зид дебљине L , начињен од материјала специфичне топлотне проводности λ , чија једна површ има фиксну температуру, а друга се хлади струјањем флуида, при коефицијенту преласка топлоте струјањем α , *Biot*-ов број је једнак

$$Bi = \frac{\frac{1L}{\frac{\lambda S}{1}}}{\frac{\alpha L}{\lambda}} = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (113)$$

Израз $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$ се користи као генерални израз, при чему L представља карактеристичну дужину, једнаку односу запремине тела и површине његове граничне површи (преко које се размењује топлота).

Примера ради,

- за зид дебљине $2 \cdot d$ и димензија попречног пресека зида $a \times b$, који се хлади симетрично струјањем флуида (α), $L = V / S = (a \cdot b \cdot 2 d) / (2 \cdot a \cdot b) = d$;
- за дугачак цилиндар полупречника r_0 , $L = V / S = (r_0^2 \pi L) / (2 r_0 \pi L) = r_0 / 2$,
- за сферу полупречника r_0 , $L = V / S = ((4 / 3) r_0^3 \pi) / (4 r_0^2 \pi) = r_0 / 3$.

Уобичајени услов провере да ли се запремина може сматрати изотермичком је да је *Biot*-ов број мањи од 0.1.

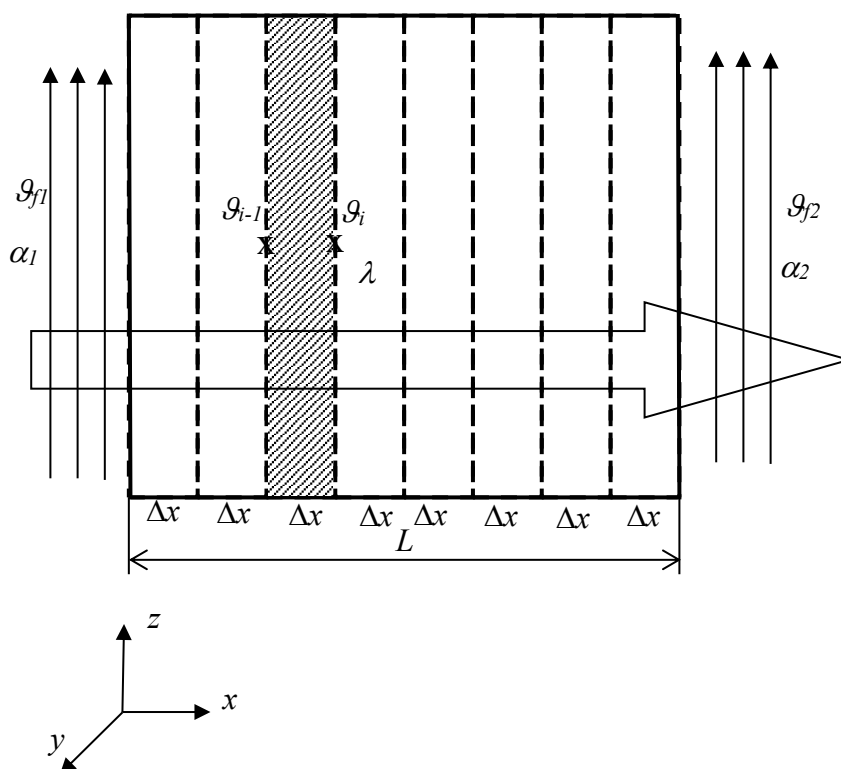
За практичне проблеме код којих је $Bi > 0.1$, у литератури се може наћи низ графика помоћу којих се за разне геометрије може одредити просторна и временска расподела температуре (странице 948 и 949 у Frank P. Incropera, David P. DeWitt: Fundamentals of heat and mass transfer, Fifth edition, John Wiley and sons, 2002). Параметри на графицима су *Biot*-ов и *Fourier*-ов број, који је дефинисан као

$$Fo = \frac{at}{L^2} = \frac{\frac{\lambda}{\rho c_p} t}{L^2} \quad (114)$$

Помоћу тих графика се у свакој тачки у сваком тренутку може одредити температура (L у изразу (114) представља позицију тачке у телу). Оваква методологија је била од интереса у инжењерској пракси при широке примене рачунара и софтверских алата.

4.8. Решавање једначина при подели топлопроводне средине на мали број делова

Јасно је да повећање броја делова, односно смањење димензије делова, доводи до смањења градијента температуре у сваком од делова (у односу на укупни градијент). На тај начин претпоставка да делови представљају изотермичке запремине постаје оправданија. Примера ради, посматрајмо једнодимензиони пренос топлоте кроз раван зид дебљине L , направљен од материјала специфичне топлотне проводности λ , који се са једне стране загрева флуидом температуре ϑ_{f1} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем са флуида на зид α_1 , а са друге стране се хлади флуидом температуре ϑ_{f2} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем са зида на флуид α_2 .



Слика 27

$$\vartheta = f(x, t) = \text{const.}(y, z)$$

За зид подељен на n једнаких делова (на примеру приказаном на слици $n = 8$) отпор преносу топлоте кроз један део зида (ширина једног дела зида $\Delta x = L / n$) износи

$$R_{\lambda 1}^T = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{S} \quad (115)$$

Пад температуре, услед преноса топлоте провођењем, на једном делу зида, исказан преко укупне разлике температура у процесу преноса топлоте са флуида температуре ϑ_{f1} на флуид температуре ϑ_{f2} , износи

$$\Delta\vartheta_{\lambda 1} = (\vartheta_{i-1} - \vartheta_i) = (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} + \frac{1}{\alpha_2 S}} = \frac{1}{n} (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (116)$$

Дакле, што је већи број делова на које је подељен зид, односно што је мања дебљина једног дела зида, то је мањи пад температуре на њему у односу на укупни пад температуре $\frac{(\vartheta_{i-1} - \vartheta_i)}{(\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2})}$,

односно то је оправданија претпоставка да део зида представља изотермичку запремину.

Наравно, са повећањем броја делова смањује се и вредност Biot-овог броја једног дела $Bi =$

$$\frac{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}}{\frac{1}{\alpha S} + \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}} = \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}}.$$

Кад се топлопроводна средина „издели“ (дискретизује), за сваки од делова се пише једначина енергетског биланса, практично у складу са објашњењем из 2.1.1. (енергетски биланс за затворен систем) и 2.1.3. (енергетски биланс на граничној површи).

Граничне површи делова, на којима се дефинишу гранични услови на сваком од делова, могу бити ка другом делу топлопроводне средине (у примеру са претходне слике постоји 6 унутрашњих делова са две граничне површи овога типа и 2 спољашња дела са једном граничном површи овог типа) или ка околини (у примеру са претходне слике постоје 2 површи овог типа, једна према флуиду температуре ϑ_{f1} и једна ка флуиду температуре ϑ_{f2}).

Ако је површ према другом делу топлопроводне средине (може се поставити координатни систем тако да је координата $x=0$), гранични услов је типа 6. (видети уводни део у поглавље 5.):

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t}; \text{ градијент температуре се израчунава као коначни}$$

прираштај температуре у дискретизованим моделу, као разлика температура доступних

у моделу. Ако се са ϑ_{21} означи температура на граничној површи између делова 1 и 2, са ϑ_1 температура на средини дела 1 и са ϑ_2 температура на средини дела 2, градијент температуре у делу лево од граничне површи, чија је дебљина L_1 , одређује се као да се топлота провођењем преноси између средине дела и граничне површи: $-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = \lambda_1 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{21}}{\frac{L_1}{2}}$. Аналогно,

градијент температуре у делу десно од граничне површи, чија је дебљина L_2 , износи $-\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t} = \lambda_2 \frac{\vartheta_{21} - \vartheta_2}{\frac{L_2}{2}}$. У случају да се посматра гранична површ између делова 1 и 2

хомогеног зида има се $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Пренос топлоте провођењем од левог дела ка граничној површи се може приказати топлотним отпором, одређеним као количник разлике температура

$\vartheta_1 - \vartheta_{12}$ и снаге преноса топлоте, $R_{\lambda 1}^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{S}$; аналогно, топлотни отпор провођењу топлоте

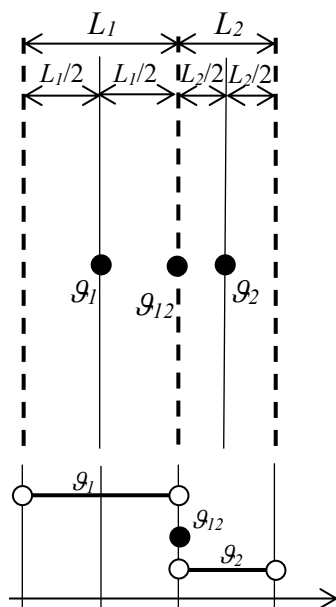
ка десном делу износи $R_{\lambda 2}^T = \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2}{s}$. Ова два топлотна отпора су везана на ред, тако да је топлотни отпор између средишних тачака суседних делова 1 и 2 топлопроводне средине (слика 28)

$$R^T = R_{\lambda 2}^T + R_{\lambda 2}^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1}{s} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2}{s} \quad (117)$$

Снага којом се енергија од дела 1 провођењем преноси у део 2 једнака је

$$P_{izl1} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{\frac{L_1}{s}}{\lambda_1} + \frac{\frac{L_2}{s}}{\lambda_2}} \quad (118)$$

Интересантно је сагледати какав профил температуре одговара приближној представи да су запремине на које је подељена топлопроводна средина изотермичке, а да је отпор преносу топлоте између њих једнак топлотном отпору провођењу топлоте између средишњих тачака запремина. Скица два суседна дела зида и профил температуре су приказани на следећој слици.



Слика 28

$$\vartheta_{12} = \vartheta_1 - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{\frac{L_1/2}{s}}{\lambda_1} + \frac{\frac{L_2/2}{s}}{\lambda_2}} \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{s} \quad (119)$$

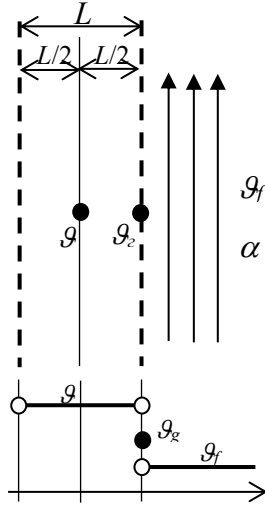
Ако је површ према околини, гранични услов је један од типова 1. – 5.; као пример представе преко топлотног отпора (аналогно претходном) приказаће се гранични услов типа 4.; као и у претходном случају, посматраће се једнодимензиони пренос топлоте. Топлотни отпор између средишње тачке дела зида дужине L који се налази уз граничну површ која се хлади струјањем флуида температуре ϑ_f (при чему коефицијент преласка топлоте струјањем са површи на флуид износи α) одређен је изразом

$$R^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L/2}{s} + \frac{1}{\alpha s} \quad (120)$$

Снага којом се енергија од дела зида предаје флуиду једнака је

$$P_{izl1} = \frac{\vartheta - \vartheta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (121)$$

Скица дела зида и суседног флуида, као и профил температуре који одговара усвојеном моделу, приказани су на следећој слици.



Слика 29

$$\vartheta_g = \vartheta - \frac{\vartheta - \vartheta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} \frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} \quad (122)$$

На претходна два примера је илустровано како се описује размена енергије кроз сваку од граничних површи које „затварају“ сваку од изотермичких запремина. Укупна снага размене енергије изотермичких запремина са околином је једнака збиру снага размене енергије кроз две граничне површине зида.

На овај начин је постављен модел за одређивање снаге којом посматрани део енергију размењује са околином (P_{izl}). Снага генерисања топлоте (P_g), као следећа компонента енергетског биланса посматраног дела, одређује се интеграцијом снаге генерисања топлоте по запремини посматраног дела. Последња компонента, којом се „затвора математички модел“, је снага којом се енергија акумулише у запремини посматраног дела (P_{ak}). Полазећи од претпоставке да део запремине V има константну температуру (ϑ), P_{ak} је једнако $\rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt}$ (густина материјала топлопроводне средине је ρ , а специфични запремински топлотни капацитет c_p).

Дакле, за елемент код кога је излазна снага кроз једну граничну површ одређена изразом (118), а кроз другу износи P_{izl2} , комплетна једначина енергетског биланса гласи

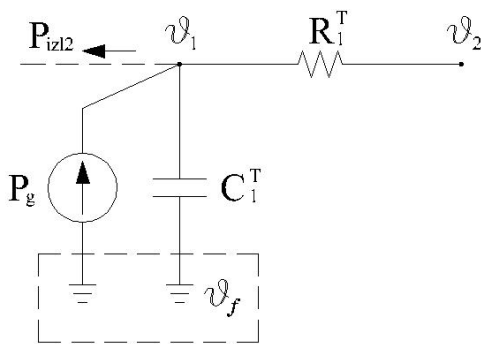
$$P_g = \rho c_p V \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{L_1}{\lambda} + \frac{L_2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{S}} + P_{izl2} \quad (123)$$

За елемент код кога је излазна снага кроз једну граничну површ одређена изразом (121), а кроз другу износи P_{izl2} , комплетна једначина енергетског биланса гласи

$$P_g = \rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta - \vartheta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} + \frac{1}{\alpha S}} + P_{izl2} \quad (124)$$

Ово је била основа на којој „се граде“ многе од метода које ће се изложити у наставку предавања.

Корак даље у представи термичких процеса је увођење топлотних шема, што је форма која је посебно погодна за електроинжењере и студенте електротехнике. Примера ради, на наредне две слике су приказани елементи топлотне шеме који одговарају претходно изнетим примерима, односно једначинама (123) и (124).

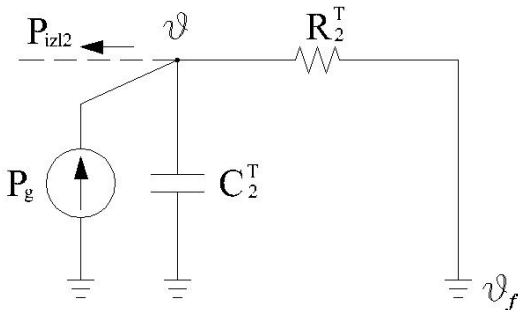


$$R_1^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{S} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{S} \quad (125)$$

$$C_1^T = \rho c_p L_1 S \quad (126)$$

P_g представља снагу генерисања топлоте у запремини $L_1 S$

Слика 30



$$R_2^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} + \frac{1}{\alpha S} \quad (127)$$

$$C_2^T = \rho c_p L S \quad (128)$$

P_g представља снагу генерисања топлоте у запремини $L S$

Слика 31

За елемент топлотне шеме са слике 31 коришћењем истих принципа као у теорији кола може се написати једначина:

$$P_g = C_2^T \frac{d(\vartheta - \vartheta_f)}{dt} + P_{izl2} + \frac{\vartheta - \vartheta_f}{R_2^T} \quad (129)$$

$$P_g = \rho c_p L S \frac{d(\vartheta - \vartheta_f)}{dt} + P_{izl2} + \frac{\vartheta - \vartheta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (130)$$

У случају да температура флуида ϑ_f није константна, не може се користити заменска шема са слике 31 и израз (129), већ тада важи израз (124).

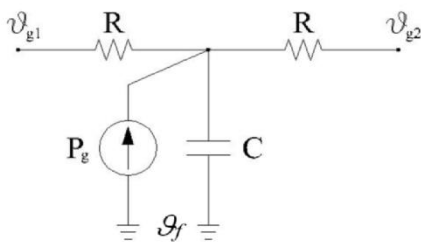
Уколико се за пораст температуре у односу на референтну температуру (ϑ_f) уведе ознака $\theta = \vartheta - \vartheta_f$ (што је погодно када је ϑ_f константна), израз (130) постаје

$$P_g = \rho c_p L S \frac{d\theta}{dt} + P_{izl2} + \frac{\theta}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (131)$$

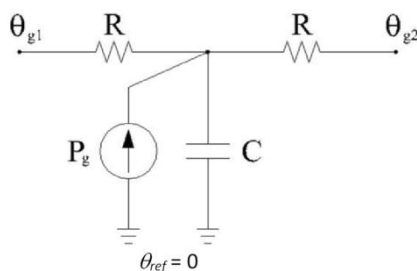
Аналогно, за елемент топлотне шеме са слике 30, за случај да је температура флуида ϑ_f константна, има се

$$P_g = \rho c_p L_1 S \frac{d\theta_1}{dt} + P_{izl2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{2}} \quad (132)$$

На основу претходно изложеног, лако се могу поставити модели дела кроз којих се врши једнодимензиони пренос топлоте кроз део за који се сматра да има исту температуру по запремини (изотермички део). Модел који важи за **случај да је температура флуида константна** приказан је на наредне две слике (температуре у чворовима су температуре граничних површи и температура запремине дела); на слици 32 чворовима су додељене температуре – референтни чвор је на температури флуида, а на слици 33 порасти – референтни чвор је на вредности нула.

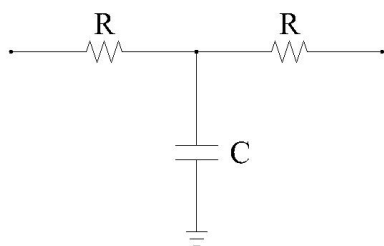


Слика 32



Слика 33

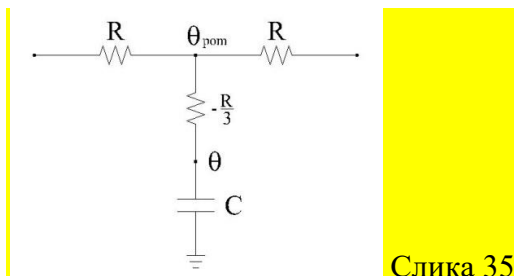
Уколико по запремини не постоји генерисање топлоте, шема се своди на следећу.



Слика 34

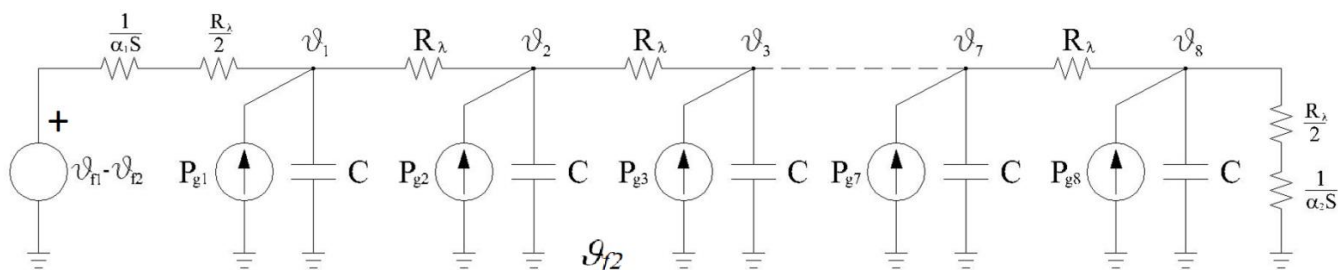
У литератури постоје и „софистициранији“ модели. Као што је већ објашњено, претходно коришћени модели се базирају на претпоставци да је температура по запремини константна, а да се размена енергије кроз део одвија као провођење топлоте од средишње тачке дела до граничне површи дела. Полазећи од тога да је извод температуре, а не температура, константан по запремини, долази се до модела дела приказаног на следећој слици. Овакав модел је прецизнији и његова примена доводи до тачнијих резултата при моделовању преноса топлоте кроз тело: за

добиање резултата исте тачности, потребно је применити мање оваких делова (подела средине се може извршити на мањи број делова), односно за исти број делова – за исту поделу – добијају се тачнији резултати. θ је пораст средње температуре посматраног дела, а θ_{pom} помоћна величина која нема физичко објашњење, а настала је као помоћна променљива у спроведеном математичком поступку.



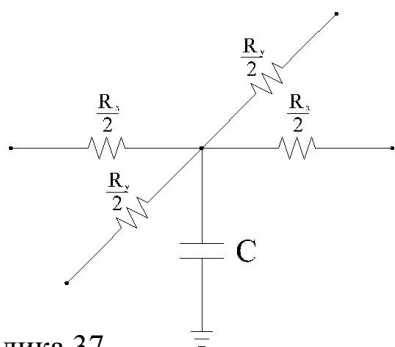
Слика 35

Посматрајмо сада раван зид по чијој се запремини генерише топлота и који се са леве стране загрева струјањем флуида температуре ϑ_{f1} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем α_1 , а са десне стране хлади струјањем флуида температуре ϑ_{f2} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем α_2 . Топлотна шема којом се описује овај систем, односно нестационарни једнодимензиони пренос топлоте кроз зид, приказан је на слици 36. Као референтна температура је узета температура хладнијег флуида ϑ_{f2} . У складу са топлотном шемом, снага загревање левог базиса ваљка се израчунава по изразу $P_{zagr} = \frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_1}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{L}{\lambda S}}$.

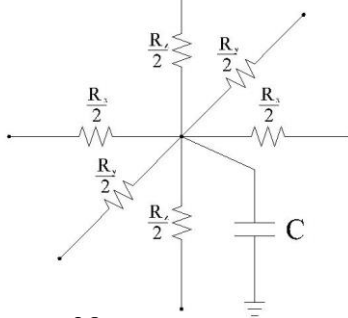


Слика 36

Коначно, на следеће две слике су приказани модели за случај дводимензионалног, односно тродимензионалног преноса топлоте у правоугаоном (*Descartes*-ом) координатном систему (случај када не постоји генерисање топлоте по запремини).



Слика 37



Слика 38

Топлотне шеме се могу применити и у случајевима када се топлотни систем састоји од више тела, сачињених од различитих материјала (такав случај је већ помињан у претходном тексту – једначина (117)). Примера ради, ако би делови дужина L_1 и L_2 на слици 28 припадали различитим телима (зидовима), сачињених од материјала топлотне проводности λ_1 и λ_2 , респективно, топлотни отпор између средишта ова два дела би износио

$$R^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{s} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{s} \quad (133)$$

У електроенергетици су чести системи у којима су поједина тела у топлотном систему направљена од материјала много веће топлотне проводности него друга тела: на пример, кабл – једно хомогено тело представља електропроводни део (бакар или алуминијум), а друго хомогено тело електрична изолација. У топлотној шеми електропроводни део се може (без практичног смањења прецизности модела) приказати као топлотни капацитет, а изолација као топлотни отпор. Другим речима, због односа вредности параметара електропроводног и изолационог материјала, за електропроводни део се може сматрати да представља изотермичку запремину, а за електроизолациони део се може занемарити акумулисање топлоте у њему. Генерисање топлоте је доминантно у електропроводном делу, односно генератор снаге у топлотној шеми је паралелно везан са топлотним капацитетом.

Коначно, топлотне шеме се могу применити и за стационарне топлотне режиме, на начин потпуно аналоган претходно изложеном: у претходно описаним моделима се само „изостави кондензатор“. Скуп једначина који одговара таквим топлотним шемама представља скуп алгебарских једначина (за разлику од скупа диференцијалних једначина, којима се описују прелазни топлотни процеси).

Примери аналитичког решавања модела разматраних у претходном тексту:

Збирка, задаци 31-34, 35-37.

Једначине којима се описује постављена топлотна шема је најпогодније писати по методи аналогној методи потенцијала чворова. Примера ради, навешће се скуп од 8 једначина (број једначина је једнак броју чворова, односно броју кондензатора) који одговара слици 36 (овај систем је превелики да би се решавао аналитички). Ако са θ означимо разлику температуре ϑ и температуре хладног флуида ϑ_2 (референтној тачки топлотне шеме одговара температура ϑ_2) систем једначина гласи:

$$C \frac{d\theta_1}{dt} = P_{g1} + \frac{\theta_{f1}-\theta_1}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{R_\lambda}{2}} - \frac{\theta_1-\theta_2}{R_\lambda} \quad (134)$$

$$C \frac{d\theta_2}{dt} = P_{g2} + \frac{\theta_1-\theta_2}{R_\lambda} - \frac{\theta_2-\theta_3}{R_\lambda} \quad (135)$$

$$C \frac{d\theta_3}{dt} = P_{g3} + \frac{\theta_2-\theta_3}{R_\lambda} - \frac{\theta_3-\theta_4}{R_\lambda} \quad (136)$$

$$C \frac{d\theta_4}{dt} = P_{g4} + \frac{\theta_3-\theta_4}{R_\lambda} - \frac{\theta_4-\theta_5}{R_\lambda} \quad (137)$$

$$C \frac{d\theta_5}{dt} = P_{g5} + \frac{\theta_4-\theta_5}{R_\lambda} - \frac{\theta_5-\theta_6}{R_\lambda} \quad (138)$$

$$C \frac{d\theta_6}{dt} = P_{g6} + \frac{\theta_5-\theta_6}{R_\lambda} - \frac{\theta_6-\theta_7}{R_\lambda} \quad (139)$$

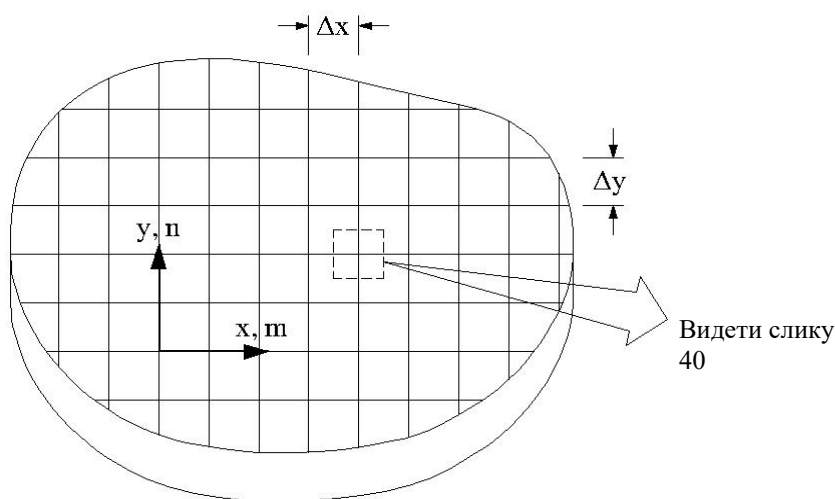
$$C \frac{d\theta_7}{dt} = P_{g7} + \frac{\theta_6-\theta_7}{R_\lambda} - \frac{\theta_7-\theta_8}{R_\lambda} \quad (140)$$

$$C \frac{d\theta_8}{dt} = P_{g8} + \frac{\theta_7-\theta_8}{R_\lambda} - \frac{\theta_8}{\frac{R_\lambda}{2} + \frac{1}{\alpha_2 S}} \quad (141)$$

Систем једначина (130) – (137) је погодно решавати помоћу рачунара, при чему се прво систем диференцијалних једначина (130) – (137) претвори у систем диференцијалних једначина, дискретизацијом у времену, а затим реши систем од 8 диференцијалних једначина. За ту намену се може написати сопствени програм, користећи постојеће програмске математичке библиотеке. Друга опција је коришћење постојећих софтверских алата, као што су *Mathcad* (погодно за мање системе једначина, и то превасходно за стационарне процесе) или *Matlab* (погодно за веће системе једначина). Када се користи *Matlab* није чак потребно ни писати диференцијалне једначине, већ се цртају блок дијаграми који заправо представљају само други исказ диференцијалних једначина. Израда симулационог програма за један топлотни систем је садржај једне од лабораторијских вежби на предмету Термички процеси у електроенергетици, на четвртој години студија. На рачунским вежбама на овом предмету ће се приказати демонстрација начина писања симулационог програма и резултата који се могу добити његовим извршењем.

4.8. Решавање једначина при подели топлопроводне средине на велики број делова

У овом одељку ће се изложити метода коначних разлика: математички поступак одређивања вредности температуре у коначном броју тачака и то у коначном броју временских тренутака. Први корак је одређивање броја и позиција тачака и усвајање скупа тренутака у којима се температуре у тим тачкама рачуна (практично, усвајање корака просторне и временске дискретизације). Видеће се да код примене појединих математичких поступака постоје ограничења у избору корака просторне и временске дискретизације. Пример поделе топлопроводне средине на делове је приказан на слици 39, за случај дводимензионалне расподеле температурног поља. У примеру, мрежа елемената је сачињена од квадратних облика. Поред мреже квадратног облика, у примени је честа и примена троугаоних облика. У тродимензионом случају, најчешће се срећу облици коцке и тетраедра.

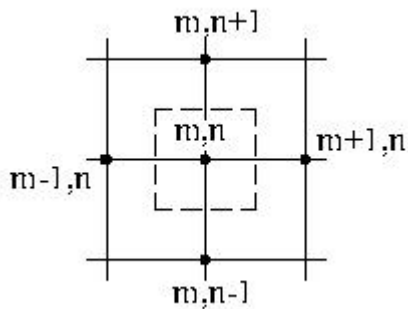


Слика 39

Слично као код претходно описаног поступка решавања топлотних проблема базираног на подели топлопроводне средине на мали број делова, и овде се сматра да једна тачка репрезентује једну област, односно да је температура области једнака температури у тој тачки. **Тачка репрезент области може, али не мора да буде у средишту области.** Као и у поглављу 4.8, поставља се енергетски биланс (генерисана топлота у области, акумулисана топлота у области и размена топлоте са околним деловима : $Q_g = Q_{ak} + Q_{izl}$). У поглављу 4.8 вршена је само просторна дискретизација и формиран је систем диференцијалних једначина који је потребно решити. За разлику од поступка из 4.8, акумулисана топлота се исказује преко коначног прираштаја у дефинисаном кораку временске дискретизације. Он се може исказати на два начина, при чему избор значајно утиче на процес израчунавања. Прва могућност је да се извод

температуре искаже као **разлика температуре у текућем и температуре у претходном тренутку**, подељена са кораком временске дискретизације (на даље ће се сматрати да је корак временске дискретизације константан). Друга могућност је да се извод температуре искаже преко **разлике температуре у следећем и температуре у текућем тренутку**.

Да би се објаснила метода, посматраће се **двостепенски пренос топлоте у правоугаоном координатном систему, без запреминског генерисања топлоте**, при чему су кораци дискретизације како по x координати (Δx), тако и по y координати (Δy), константни. На слици 40 је приказана област означена испрекиданим квадратом, репрезентована тачком у средини области (m, n) . Област је са све четири стране окружен другим елементима топлопроводне средине – растојања тачака $m - 1$ и m , односно m и $m + 1$, је Δx , а тачака $n - 1$ и n , односно n и $n + 1$, је Δy . Растојања између тачке (m, n) и граница области су $\Delta x/2$ у хоризонталном правцу и $\Delta y/2$ у вертикалном правцу.



Слика 40

Једначина енергетског биланса, за извод температуре исказан преко разлике температура у следећем $(p+1)$ и у текућем (p) тренутку, гласи (l представља координату по димензији управној на раван, по којој се температура не мења):

$$0 = \rho c_p \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \Delta x \Delta y l - \lambda \Delta y l \frac{\vartheta_{m-1,n}^p - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta x} + \lambda \Delta y l \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m+1,n}^p}{\Delta x} - \lambda \Delta x l \frac{\vartheta_{m,n-1}^p - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta y} + \lambda \Delta x l \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n+1}^p}{\Delta y} \quad (142)$$

$$\rho c_p \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \lambda \frac{\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p - 2\vartheta_{m,n}^p}{\Delta x^2} + \lambda \frac{\vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p - 2\vartheta_{m,n}^p}{\Delta y^2} \quad (143)$$

У случају када је $\Delta x = \Delta y$ (ова претпоставка не утиче на суштинско разумевање методе, а уводи се ради скраћивања записа), претходни израз (уз увођење ознаке $a = \lambda / \rho c_p$) постаје

$$\frac{1}{a} \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p - 4\vartheta_{m,n}^p}{\Delta x^2} \quad (144)$$

Једноставном трансформацијом се долази до

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo(\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p) + (1 - 4Fo)\vartheta_{m,n}^p \quad (145)$$

где је Fo *Fourier*-ов број, $Fo = a \Delta t / \Delta x^2$.

У случају једнодимензионог преноса топлоте, једначина која описује елемент који ј са обе стране окружен другим елементима топлопроводне средине гласи

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo(\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p) + (1 - 2Fo)\vartheta_{m,n}^p \quad (146)$$

Ако се извод температуре искаже преко разлике температура у текућем $(p+1)$ и претходном (p) тренутку, једначина која одговара једначини (144) гласи:

$$\frac{1}{a} \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} - 4\vartheta_{m,n}^{p+1}}{\Delta x^2} \quad (147)$$

Одатле се може написати

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p = Fo(\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} - 4\vartheta_{m,n}^{p+1}) \quad (148)$$

$$(1 + 4Fo)\vartheta_{m,n}^{p+1} - Fo(\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1}) = \vartheta_{m,n}^p \quad (149)$$

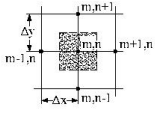
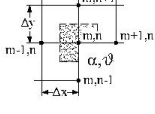
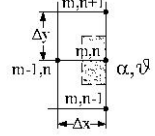
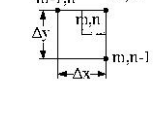
Постоји суштинска разлика између једначина (145) и (149).

Ако се крене од почетног тренутка, у коме су као почетни услов познате температуре у свим тачкама, применом израза (145) могу се једноставно одредити њихове вредности у сваком од наредних тренутака (најпре у тренутку Δt , потом у тренутку $2 \Delta t$, па у $3 \Delta t$ и тако даље; постоје експлицитни изрази за температуру у сваком од наредних тренутака, због чега се метода заснована на разлици температура у следећем у односу на текући тренутак назива *експлицитна метода*).

Израз (149) садржи 4 променљиве – из претходног тренутка фигурише само једна променљива – $\vartheta_{m,n}^p$. Да би се одредиле температуре у сваком од тренутака после нултог, потребно је решити систем једначина – број једначина једнак је броју чворова. За решавање система једначина се користи инверзија матрице или нека од нумеричких метода – често коришћени метод је *Gauss-Seidel*-ов итеративни метод. Метода заснована на разлици температура у текућем у односу на претходни тренутак се назива *имплицитна метода*. На први поглед „праволинијска природа“ експлицитне методе делује као природнија, боља и једноставнија, па би се очекивало да израчунавање по тој методи захтева мање израчунавања, те због тога траје краће. Међутим, да би поступак експлицитне методе конвергирао, мора бити испуњен услов да је коефицијент уз температуру $\vartheta_{m,n}^p$ позитиван; дакле, $(1 - 4 Fo) \geq 0$, односно постоји услов да је *Fourier*-ов број $Fo \leq 1 / 4$. Последица је да за усвојени корак просторне дискретизације Δx^* , корак временске дискретизације мора да буде мањи од $\Delta t^* \leq (1/4) \Delta x^{*2} / a$. Код имплицитне методе конвергенција не зависи од величине временског корака, односно температура се може израчунавати у произвољном броју корака. Због тога се може догоди да време прорачуна буде мање него када би се температура израчунавала применом експлицитне методе у већем броју краћих временских интервала, које је неопходно због услова нумеричке конвергенције.

У претходном тексту је изложен пример да је елемент топлопроводне средине са све четири стране окружен другим елементима топлопроводне средине. На слици 41 су дате алгебарске диференце једначине и за неколико елемената топлопроводне средине који се налазе поред граничних површи. Пошто је извођење неке од ових једначина једно од могућих испитних питањима, саветује се студентима да самостално (као „домаћи задатак“) изведу неку од једначина.

На вежбама ће бити урађен један пример нестационарног једнодимензионог преноса топлоте, у систему у коме постоји генерисање топлоте по запремини тела.

Конфигурација	Експлицитна метода		Имплицитна метода
	Једначина коначних разлика	Критеријум стабилности	
	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo \left(\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p \right) + (1 - 4Fo)\vartheta_{m,n}^p$	$Fo \leq \frac{1}{4}$	$(1 + 4Fo)\vartheta_{m,n}^{p+1} - Fo \left(\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m+1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} \right) = \vartheta_{m,n}^p$
Унутрашњи чвор			
	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = \frac{2}{3}Fo \left(\vartheta_{m+1,n}^p + 2\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p \right) + \left(1 - 4Fo - \frac{1}{3}BiFo \right) \vartheta_{m,n}^p + \frac{1}{3}BiFo\vartheta_{\infty}$	$Fo(3 + Bi) \leq \frac{3}{4}$	$\left(1 + 4Fo \left(1 + \frac{1}{3}Bi \right) \right) \vartheta_{m,n}^{p+1} - \frac{2}{3}Fo \left(\vartheta_{m+1,n}^{p+1} + 2\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} \right) = \vartheta_{m,n}^p + \frac{4}{3}BiFo\vartheta_{\infty}$
Чвор у унутрашњости угла са струјањем			
	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo \left(2\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p + 2Bi\vartheta_{\infty} \right) + (1 - 4Fo - 2BiFo)\vartheta_{m,n}^p + 2BiFo\vartheta_{\infty}$	$Fo(2 + Bi) \leq \frac{1}{2}$	$(1 + 2Fo(2 + Bi))\vartheta_{m,n}^{p+1} - Fo \left(2\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + \vartheta_{m,n+1}^{p+1} + 2Bi\vartheta_{\infty}^{p+1} \right) = \vartheta_{m,n}^p + 2BiFo\vartheta_{\infty}$
Чвор на равном делу са струјањем			
	$\vartheta_{m,n}^{p+1} = 2Fo \left(\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + Bi\vartheta_{\infty} \right) + (1 - 4Fo - 4BiFo)\vartheta_{m,n}^p + 4BiFo\vartheta_{\infty}$	$Fo(1 + Bi) \leq \frac{1}{4}$	$(1 + 4Fo(1 + Bi))\vartheta_{m,n}^{p+1} - 2Fo \left(\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1} + 2Bi\vartheta_{\infty}^{p+1} \right) = \vartheta_{m,n}^p + 4BiFo\vartheta_{\infty}$
Чвор на спољашњем углу са струјањем			

Слика 41

4.9. Графичка метода

Графичка метода се примењује за решавање стационарних дводимензионалних проблема топлотног провођења. Графичком методом се одређује подужни топлотни отпор између две произвољне изотермичке линије, које се налазе на различитим температурама, чија разлика износи $\Delta\theta_R$. Метода се заснива на цртању изотермичких линија и линија топлотне снаге. Разлика температура за које се цртају две суседне изотермичке линије ($\Delta\theta_{корак}$) треба да буде иста, при чему треба да буде испуњен услов $\Delta\theta_{корак} = \Delta\theta_R / N_T$, где је N_T цео број. Изотермичке линије и линије топлотне снаге се цртају следећи правило да изотермичке линије и линије топлотне снаге буду међусобно управне и да збир наспрамних страница добијених фигура буде приближно једнак (да се формирају „криволинијски квадрати“). Подужни топлотни отпор се одређује према изразу

$$r_l' = \frac{l}{\lambda} \frac{N_T}{N_S}, \quad (150)$$

где су: λ специфична топлотна проводност, N_T број изотермичких линија (при чему се броји само једна од две изотермичке линије између којих се одређује подужни топлотни отпор) и N_S број линија топлотне снаге.

4.10. Коришћење електричних аналогних модела

4.10.1. Коришћење дисконтинуалних модела

На испит неће доћи питања из теоријског садржаја одељка 4.10.1, али се у овом одељку објашњава поступак који се спроводи на лабораторијским вежбама за које се добијају поени за предиспитне обавезе.

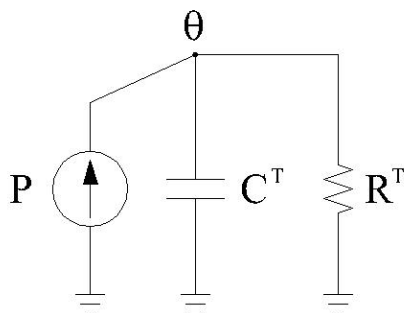
Као што је у претходним излагањима напоменуто, између топлотних и електричних појава постоји аналогија. Она се огледа у једнакости математичких форми (једначина) којима се описују те појаве. То се може искористити да се направи аналогни електрични модел топлотног система. Онда се могу извршити мерења на електричном моделу, а затим из добијених резултата добити и вредности еквивалентних величина у топлотном систему.

За "свођење" топлотних величина на електричне и обрнуто, уводе се коефицијенти свођења, чије вредности треба да буду такве да се параметри у стварном топлотном систему сведу у погодан опсег параметара у еквивалентном електричном систему. При томе се преко димензија коефицијената свођења регулише и свођење јединица величина у топлотном систему у јединице величина у електричном систему (моделу).

Код избора параметара електричног система (елемената електричног кола) увек треба имати у виду њихову практичну остварљивост и потребу да се за мерења користе стандардни мерни

инструменти. При избору елемената кола, електричне вредности не смеју бити ни превише велике (када би настао проблем мерне опреме и величине елемената), ни превише мале (када би се појавили проблеми мерне опреме и неповољан однос сигнал-шум).

Начин увођења коефицијената ће се објаснити на примеру елементарне топлотне шеме приказане на слици 42.



Слика 42

Једначина која описује ову топлотну шему гласи

$$P = C^T \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (151)$$

Као базни коефицијенти свођења топлотних на електричне величине се усвајају три коефицијента свођења (на пример: за топлотни и електрични отпор ($k_R = R^T / R$), топлотни и електрични капацитет ($k_C = C^T / C$) и разлику температура и напон ($k_U = \theta / U$)). Сви остали коефицијенти (за снагу и струју (k_I), време у топлотном и време у електричном систему (k_t), енергију и наелектрисање (k_Q) итд.) су једнозначно одређени након усвајања базних коефицијената свођења.

Усвојимо као базне коефицијенте свођења k_R , k_C и k_U . Ако се једначина (151) подели са односом два базна коефицијента k_U/k_R (означимо овај количник са k_I), долази се до

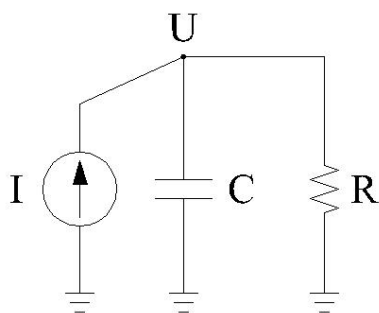
$$\frac{P}{k_I} = C^T k_R \frac{d \frac{\theta}{k_U}}{dt} + \frac{\frac{\theta}{k_U}}{\frac{R^T}{k_R}} \quad (152)$$

Претходна једначина се може „проширити“ увођењем коефицијента свођења k_C ; након његовог увођења и једноставне трансформације израза долази се до

$$\frac{P}{k_I} = \frac{C^T}{k_C} \frac{d \frac{\theta}{k_U}}{d \frac{t}{k_R k_C}} + \frac{\frac{\theta}{k_U}}{\frac{R^T}{k_R}} \quad (153)$$

За елементарно електрично коло са једним струјним генератором, једним кондензатором и једним електричним отпорником, приказано на слици 47, диференцијална једначина која га описује гласи

$$I = C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} \quad (154)$$



Слика 43

Поређењем једначина (155) и (156) јасно је да је коефицијент свођења снаге у топлотном систему на струју у електричном систему једнак k_I , а времена у топлотном систему у време у електричном систему $k_t = k_R \cdot k_C$.

Поступак се може спровести на следећи начин. На основу карактеристика топлотног система се одређују вредности снаге загревања, топлотног капацитета и топлотног отпора (слика 42). Коефицијенти k_R , k_C и k_I се одређују тако да вредности елемената електричног кола са слике 43 – струја струјног генератора, отпор и капацитет, као и резултујући напон и време прелазног електричног процеса, буду у практично погодним границама. Затим се на електричном колу изврши снимање промене напона у времену. Свакој регистрованој тачки напона U^* у тренутку t^* одговара тачка пораста температуре $\theta^* = k_U U^*$ у тренутку $k_t t^*$.

У збирци је дат један комплетан нумерички пример (задатак 40), а у четвртој лабораторијској вежби студенти ће имати прилике да спроведу комплетан поступак, који укључује и мерење на електричном моделу.

4.10.2. Коришћење континуалних модела

Континуални електрични модели се користе као „додатак“ графичкој методи објашњеној у одељку 4.9. Помоћу континуалних електричних модела се експериментално може доћи до еквипотенцијалних линија у електричном моделу који је аналоган (има исту димензију) анализираном топлотном моделу. Ове еквипотенцијалне линије су аналогне изотермичким линијама у топлотном систему. Следећи корак је цртање линија температурног градијента (линија топлотне снаге) у топлотном систему, водећи се правилом да су линије топлотне снаге управне на изотермичке линије и да са њима формирају „криволинијске квадрате“.

5. Расподељени мешовити пренос топлоте

Досадашња разматрања су се односила на случајеве чврсте материјалне средине у којој се пренос топлоте одвија провођењем, при чему је тело ограничено једном или више површи коначних величина, од којих свака има константну температуру. Гранични услови су дефинисани на површима коначне величине које имају константну температуру. У пракси постоји низ случајева код којих се температура граничне површи чврсте материјалне средине континуално мења. Као што ће се из даљег излагања видети, у таквим случајевима се мора решавати расподељени пренос топлоте провођењем и струјањем (струјање се евентуално разматра у комбинацији са зрачењем). Такви случајеви се у пракси јављају код ребара за хлађење и размењивача топлоте између два флуида.

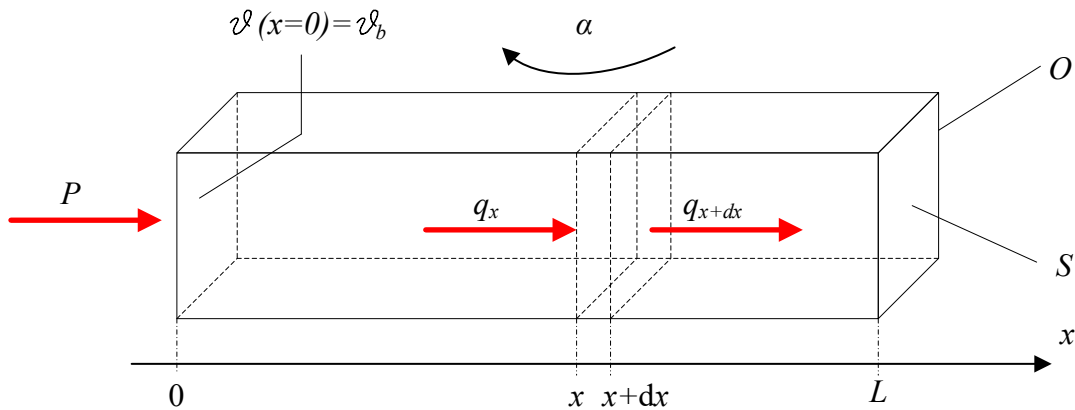
5. 1. Ребра за хлађење

При раду електротехничких уређаја јављају се губици енергије, односно долази до генерисања топлоте. Ова топлота изазива повећање температуре појединих делова уређаја, које не смеју да пређу дефинисане вредности. Отпор преласку топлоте од уређаја до расхладног флуида мора бити довољно мали да би пораст температуре уређаја, одређен као производ снаге губитака и топлотног отпора, био испод дозвољених вредности. Једна од могућности да се то постигне је да се на тело које треба охладити постави хладњак ребрасте конструкције и тиме повећа површ са које се топлота одводи струјањем, и тиме смањи укупни топлотни отпор. Критеријум задовољавајућег хлађења се може исказати и на следећи начин: потребно је да снага одвођења топлоте, коју би хладњак одводио при температури тела ослоњеног на хладњак једнакој максимално дозвољеној, и при дефинисаној температури расхладног флуида који одводи топлоту са оребрене површи Q_{∞} , буде већа од губитака у уређају.

Температура се дуж ребра за хлађење преноси провођењем, док се у попречном правцу ка флуиду преноси струјањем. **Површинска густина снаге ка флуиду се смањује са повећањем растојања од хлађеног тела, као последица опадања температуре ребра.** Базни израз (диференцијална једначина) се добија на основу енергетског биланса за елементарни део ребра. Енергетски биланс обухвата два члана размене енергије провођењем са суседним елементима ребра и члан одвођења топлоте струјањем са површи омотача елементарног дела. Иницијално постављање и решавање диференцијалне једначине ће се извршити за случај да је коефицијент преласка топлоте струјањем (α) дуж ребра константан. У случају природног струјања флуида промена α дуж ребра је значајна, па је треба узети у обзир.

5. 1. 1. Елементарна геометрија – константан попречни пресек ребра

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра на растојању x од тела на које је ребро ослоњено, дужине dx (слика 44) гласи:



Слика 44

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (155)$$

q_x представља снагу којом се топлота преноси провођењем у правцу осе x (на месту x), а $dq_{strujanja}$ снагу којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине dx . Разлика $(q_{x+dx} - q_x)$ представља диференцијал функције снаге провођења топлоте.

Из математике је познато да је диференцијал (прираштај) функције $y(x)$, $\Delta y(x)$, једнак производу извода функције $y'(x)$ и прираштаја независно променљиве Δx : $\Delta y(x) = y'(x) \Delta x$.

Функционална зависност снаге провођења од координате x гласи

$$q_x = -\lambda S \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad (156)$$

па је њен диференцијал $\Delta q_x(x)$

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda S \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda S \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx - \lambda \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx. \quad (157)$$

У случају да се попречни пресек ребра не мења по координати x

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda S \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda S \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx. \quad (158)$$

Изрази (157) и (158) важе за линеарну топлопроводну средину (константна вредност топлотне проводности λ); уколико је λ променљиво, не може се извући из заграда.

Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача износи

$$dq_{strujanja} = \alpha O dx (\vartheta - \vartheta_\infty). \quad (159)$$

На основу (155), (158) и (159) може се написати

$$\lambda S \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx = \alpha O dx (\vartheta - \vartheta_\infty), \quad (160)$$

одакле се формира диференцијална једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha O}{\lambda S} (\vartheta - \vartheta_{\infty}). \quad (161)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине (подсетимо, разматра се случај да се коефицијент преласка топлоте струјањем не мења дуж ребра) је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_{\infty}, \quad (162)$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha O}{\lambda S} = \frac{4 \alpha}{\lambda D}. \quad (163)$$

(O представља обим попречног пресека ребра, S површину попречног пресека; у случају да је попречни пресек кружног облика, однос $S / O = D / 4$, а у случају правоугаоног попречног пресека $S / O = a \cdot b / (2(a + b))$).

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине (162) одређују се на основу граничних услова за два базиса ребра за хлађење. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра која је ослоњена на тело чије је температура задата ($x = 0$) – $\vartheta(x = 0) = \vartheta_b$. Други гранични услов се поставља за други базис ребра ($x = L$; L представља дужину ребра), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_{∞} , при чему је коефицијент преласка топлоте струјањем са базиса на флуид α . Прецизан исказ другог граничног услова гласи

$$-\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L} = \alpha (\vartheta(x = L) - \vartheta_{\infty}). \quad (164)$$

Некада се, у циљу поједностављивања израза, које може бити од интереса за задатке на испиту, користе и два упрошћена гранична услова. Први је да је снага преноса топлоте ка базису једнака нули,

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L} = 0, \quad (165)$$

и други је да је температура базиса једнака температури флуида:

$$\vartheta(x = L) = \vartheta_{\infty} \quad (166)$$

Снага одвођења топлоте се може израчунати сабирањем (интеграцијом) снага које са омотача одводе струјањем:

$$P = \int_{x=0}^L \alpha O (\vartheta(x) - \vartheta_{\infty}) dx + \alpha S (\vartheta(L) - \vartheta_{\infty}), \quad (167)$$

или, што је једноставније, као снага која пође са базиса на који је ослоњено тело које се хлади

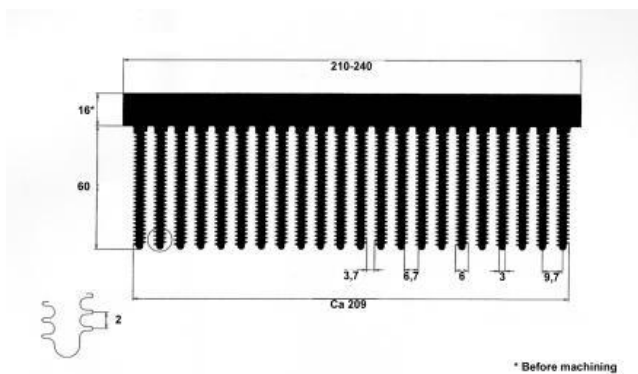
$$P = -\lambda S \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0}. \quad (168)$$

Појам ефикасности ребра (η) за хлађење се дефинише као снага хлађења подељена са снагом која би се имала када би читава температура ребра била једнака температури базиса на који је ослоњено тело које се хлади:

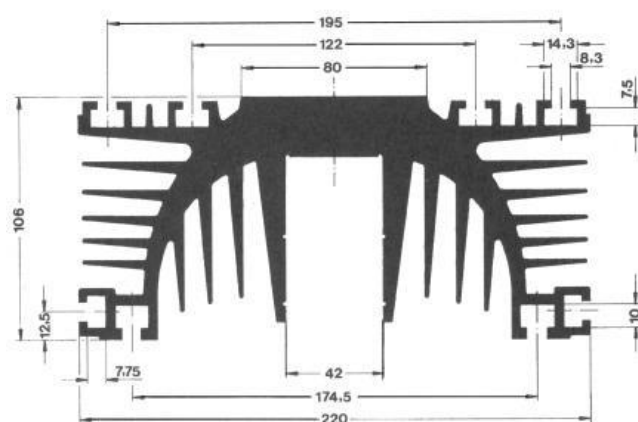
$$\eta = \frac{P}{\alpha(O L+S)(\vartheta_b - \vartheta_{\infty})} \quad (169)$$

5. 1. 2. Хладњаци засновани на ребрима за хлађење

Теорија ребара за хлађење из одељка 5.1.1. је разматрала случај елементарних геометријских облика, односно посматрао се случај константног попречног пресека ребра. Хладњаци који се користе у пракси имају доста сложеније облике. Примера ради, на сликама 45 и 46 су приказана два хладњака намењена за хлађење полупроводничких компоненти енергетских претварача. Прорачун преноса топлоте код хладњака са оваквим „ребрима за хлађење“ је компликованији и по правилу се врши од стране произвођача хладњака применом софтвера. Након реализације (производње) хладњака, произвођачи експериментално одређују карактеристике хладњака, на основу чега у својим каталозима дају карактеристике које су погодне за практични одабир хладњака у уређајима енергетске електронике.



Слика 45

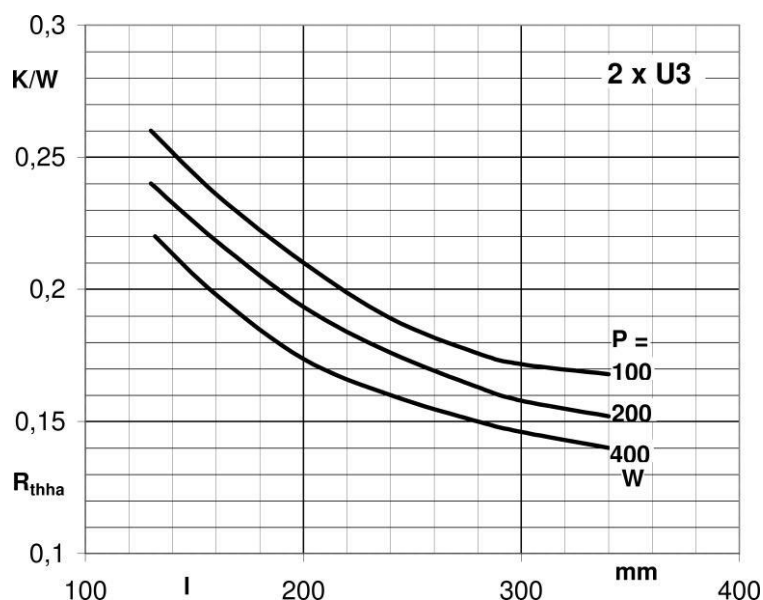


Слика 46

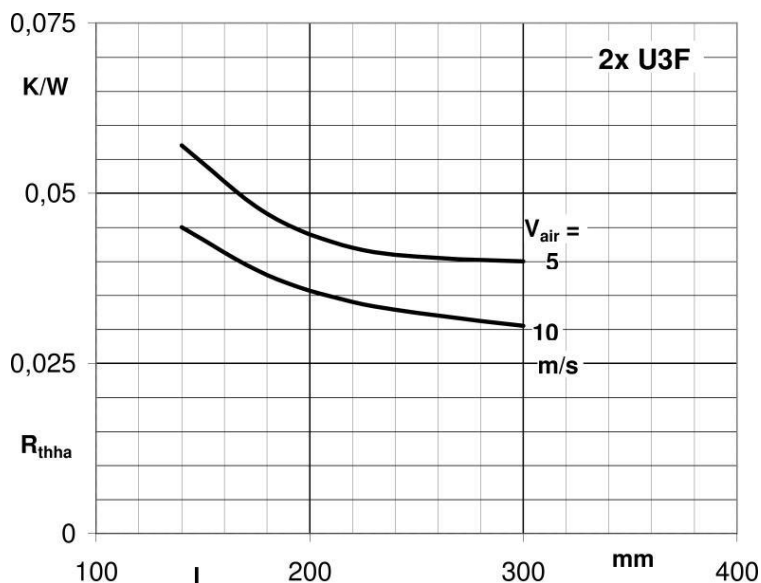
Произвођачи дају термичку карактеристику у облику термичког отпора R_{th}^{hl} (K / W) (однос разлике температура хлађеног тела и температуре амбијента и одведене топлоте), за сваки од предвиђених начина хлађења хладњака. Пример вредности топлотног отпора се даје за хладњак са слике 46 (комерцијална ознака U 3), у конфигурацији два хладњака по компоненти, за природно и принудно хлађење. У табели (слика 47) су дате вредности за хладњак дужине 300 mm, а на графицима вредности при природном хлађењу (слика 48) и при принудном хлађењу (слика 49) у зависности од дужине хладњака.

Хладњак	За компоненту пречника mm	$R_{th\ pri}$	$R_{th\ prin}$
		Природно хлађење K/W	Принудно хлађење ваздухом K/W
2 x U 3 / 300	47 ± 2	0.145 (400W)	0.04 ($V_{air} = 4\text{ m/s}$)

Слика 47



Слика 48



Слика 49

Са слике 48 се може приметити да са порастом снаге опада топлотни отпор – разлог је пораст коефицијента преласка топлоте струјањем α (са растом снаге расте и разлика температура на површи хладњака и околног ваздуха, а због тога и коефицијент преласка топлоте струјањем).

Типична ситуација је да се топлота генерише унутар полупроводничке компоненте, због чега постоји разлика температуре од најтоплије тачке у компоненти и температури на површи компоненте, која је ослоњена на хладњак. Карактеристику преноса топлоте унутар компоненте по правилу даје произвођач, у форми топлотног отпора. Примера ради, за један брзи IGBT модул (приказан на слици 50) топлотни отпор преносу топлоте кроз полупроводничку компоненту (R_{th}^{pp}) износи 0.4 K / W по транзистору.



Слика 50

Ако је дозвољена температура полупроводника на месту где се јављају губици и генерише топлота ϑ_{pp} (у случају конкретне компоненте она износи 150 °C), температура расхладног ваздуха ϑ_a (рецимо 25 °C), а снага губитака P_γ , мора бити испуњен услов

$$(R_{th}^{hl} + R_{th}^{pp})P_\gamma \leq \vartheta_{pp} - \vartheta_a \quad (170)$$

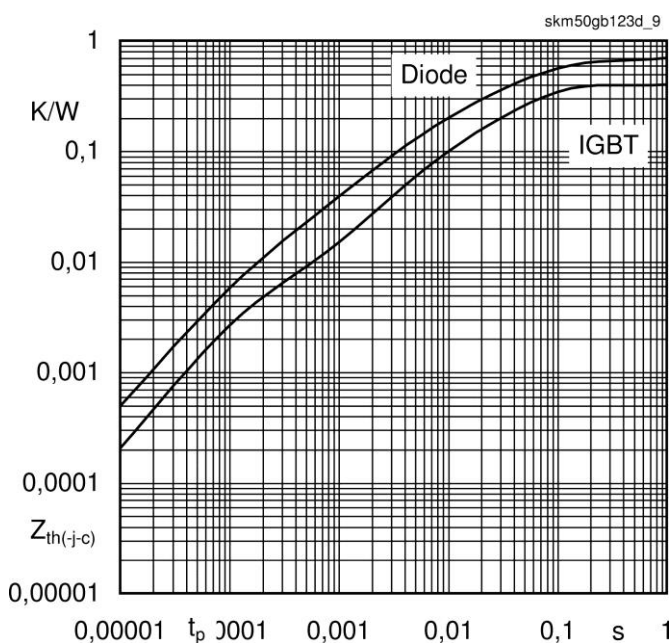
Пад температуре унутар полупроводничке компоненте је диктиран конструкцијом, карактерисаном топлотним отпором R_{th}^{pp} , и радним режимом, од кога зависи снага губитака P_γ . Да не би дошло до термичког оштећења уређаја, потребно је одабрати хладњак тако да му термички отпор буде мањи од

$$R_{th}^{hl*} \leq \frac{\vartheta_{pp} - \vartheta_a}{P_\gamma} - R_{th}^{pp} \quad (171)$$

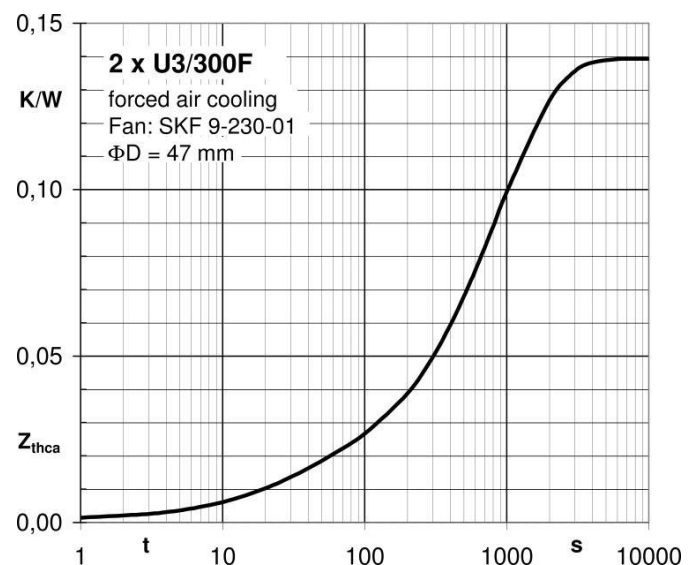
Из претходног израза се одређује максимална дозвољена вредност топлотног отпора хладњака (R_{th}^{hl*}). На основу ње се, користећи каталог произвођача, може одабрати хладњак. Одабир хладњака подразумева одабир типа хладњака, одређивање његове дужине и евентуалног вентилатора.

Поред наведених топлотних отпора у стационарним топлотним стањима, као карактеристика полупроводничких компоненти и хладњака даје се и транзијентни топлотни отпор. Ове карактеристике омогућавају одређивање температуре током несатационних топлотних процеса који могу да настану, на пример, при временски променљивом оптерећењу и снази губитака у полупроводничким компонентама.

Примери транзијентних топлотних отпора за полупроводничку компоненту су дати на слици 51, а за хладњак на слици 52. Приметимо да је време за које транзијентни топлотни отпор (односно одговарајућа разлика температура) достигне стационарно стање за неколико редова величина већи код хладњака него код полупроводничке компоненте.



Слика 51



Слика 52

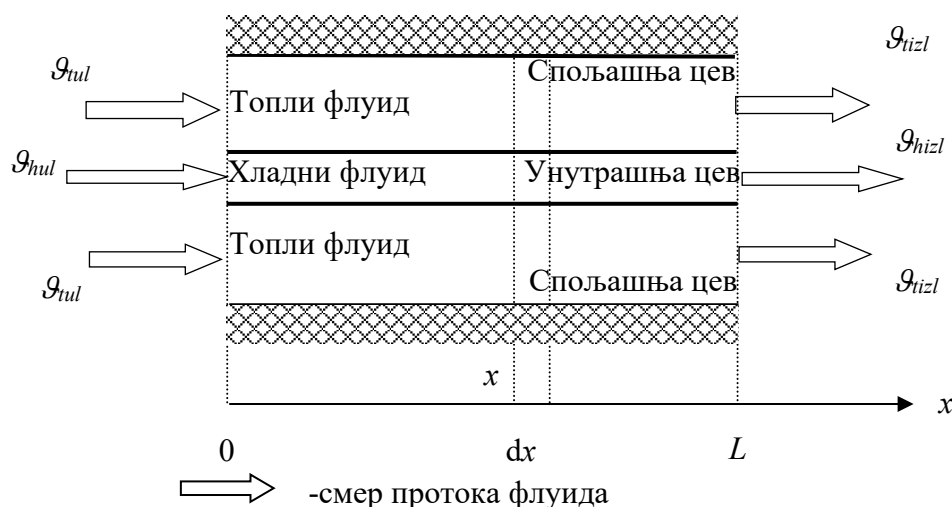
5. 2. Размењивачи топлоте између два флуида

Под размењивачем топлоте се подразумева конструкција преко које два флуида размењују топлоту преко зида цеви са чије једне стране протиче топли флуид, а са друге хладни флуид. Пренос топлоте од једног ка другом флуиду обухвата две компоненте преноса топлоте струјањем и компоненту преноса топлоте провођењем кроз цев. У пракси постоји низ различитих облика размењивача топлоте. Основне једначине које описују размењиваче топлоте ће се извести за случај елементарне конструкције двоструке цеви, при чему се цев кроз коју тече хладни флуид налази унутар цеви кроз коју тече топли флуид (слике 53 и 54). **При постављању и решавању математичког модела размењивача топлоте полази се од претпоставке да се коефицијенти преласка топлоте струјањем са топлијег флуида на цев и са цеви на хладнији флуид, као и отпор преласку топлоте провођењем кроз цев, не мењају дуж цеви. Спољашња површ спољашње цеви се посматра као идеално топлотно изолована од околине. Занемарује се пренос топлоте провођењем дуж цеви између флуида, као и дуж флуида (маркирани израз испод једначине (83)).**

У наставку текста се анализирају размењивачи топлоте код којих флуиди струје у истом правцу и истом или супротном смеру. Поред њих постоје и размењивачи топлоте код којих флуиди струје попречно један у односу на други. Теорија, односно једначине којима се описује њихово понашање, могу се наћи у литератури.

Слично као код ребара за хлађење, у случају да је смер топлог и хладног флуида исти, температура топлог флуида опада дуж цеви, температура хладног расте, па разлика топлог и хладног флуида опада. Разлика у односу на ребра за хлађење је у томе што се код ребара за хлађење температура ваздуха који хлади ребро није мењала дуж ребра. Основна диференцијална једначина чијим се решавањем долази до промена температуре топлог и хладног флуида, а на основу њих и осталих релевантних величина, поставља се преко енергетског биланса за топли и хладни флуид, за елементарну дужину цеви преко које флуиди размењују топлоту.

5.2.1. Размењивач топлоте у облику двоструке цеви са истим смеровима струјања флуида



Слика 53

Елементарна снага која се на елементарној дужини dx , на координати x , преноси од топлог ка хладном флуиду износи

$$dq = \frac{\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)}{dR^T}, \quad (172)$$

где су:

$\vartheta_t(x)$ - температура топлог флуида на координати x ,

$\vartheta_h(x)$ - температура хладног флуида на координати x и

dR^T - отпор преласку топлоте на елементарном делу цеви, који се састоји од три компоненте: прелазак топлоте струјањем са топлог флуида на спољашњу површ унутрашње цеви, провођење кроз унутрашњу цев и струјање са унутрашње површи унутрашње цеви на хладни флуид. Овим компонентама одговарају, респективно, сабирци у изразу

$$dR^T = \frac{1}{\pi d \alpha_s dx} + \frac{1}{\lambda \pi d dx} + \frac{1}{\pi d \alpha_u dx}, \quad (173)$$

где су:

d - пречник цеви,

δ - дебљина цеви ($\delta \ll d$),

α_s – коефицијент преласка топлоте струјањем са топлог флуида на спољашњу површ унутрашње цеви

λ – специфична топлотна проводност материјала унутрашње цеви,

α_u – коефицијент преласка топлоте струјањем са унутрашње површи унутрашње цеви на хладни флуид

Претходни приближни израз се заснива на чињеници да је дебљина цеви много мања од њеног полупречника. Отпор провођењу топлоте је израчунат по формули која важи за раван зид.

У даљим разматрањима ће се претпоставити да коефицијенти преласка топлоте дуж цеви имају константну вредност, што приближно важи јер је струјање флуида принудно. Израз за елементарну снагу преноса топлоте се може трансформисати у форму:

$$dq = \pi dx \left(\frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_u} \right)^{-1} (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)), \quad (174)$$

што као погодно намеће увођење јединственог коефицијента преноса топлоте (K_p):

$$K_p = \left(\frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_u} \right)^{-1} \quad (175)$$

Дакле,

$$dq = \pi dK_p (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) dx \quad (176)$$

С обзиром да је спољашња цев идеално топлотно изолована од околине, елементарна снага којом се енергија одводи од топлог флуида је једнака елементарној снази којом се енергија предаје хладном флуиду (16):

$$dq = -\dot{m}_t c_{pt} d\vartheta_t(x) \quad (177)$$

(знак минус потиче од тога што је негативан градијент температуре топлог флуида у смеру x осе)

Аналогно, за хладни флуид се може написати

$$dq = +\dot{m}_h c_{ph} d\vartheta_h(x) \quad (178)$$

(знак плус потиче од тога што је у смеру x позитиван градијент температуре хладног флуида)

Значење ознака у претходна два израза је:

$\dot{m}_t$ – масени проток топлог флуида,

$\dot{m}_h$ – масени проток хладног флуида,

c_{pt} – специфични масени топлотни капацитет топлог флуида и

c_{ph} – специфични масени топлотни капацитет хладног флуида.

Претходне три једначине представљају основне енергетске билансе, односно основне једначине чијом се интеграцијом могу одредити промена три непознате величине дуж x осе: промена температуре топлог флуида, промена температуре хладног флуида и снага преноса топлоте између њих. У тексту који следи извршиће се интеграција ових једначина у границама од уласка у цев до изласка из цеви, чиме ће се добити веза између снаге укупног преноса енергије и температура топлог и хладног флуида на уласку и изласку из цеви.

Изражавањем диференцијала температура у изразима (177) и (178) преко осталих величина, а затим формирањем њихове разлике, добија се

$$d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) = -\left(\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}}\right) dq. \quad (179)$$

Заменом dq из израза (176) у (179), после примене елементарне трансформације долази се до

$$\frac{d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x))}{\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)} = -K_p \pi d \left(\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) dx. \quad (180)$$

Интеграцијом претходне једначине у границама $[\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}, \vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}]$, односно $[0, L]$ добија се

$$\ln \frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} = -K_p \left(\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) S, \quad (181)$$

где S означава површину размењивача топлоте ($\pi d L$).

Следећа интеграција ће се применити на елементарне изразе промене енергије топлог флуида (177) и хладног флуида (178):

$$q = m_t c_{pt} (\vartheta_{tul} - \vartheta_{tizl}) \quad (182)$$

$$q = m_h c_{ph} (\vartheta_{hizl} - \vartheta_{hul}) \quad (183)$$

Слично као што су изрази (177) – (178) представљали основне једначине у диференцијалном облику, изрази (181) – (183) представљају основне везе између интегралних вредности, од уласка до изласка из хладњака.

Уобичајено, за неки хладњак су познати протоци и карактеристике оба флуида, температура хладног флуида на уласку ϑ_{hul} (пре него што се загреје) и температура топлог флуида на уласку ϑ_{tul} (пре него што се охлади). Тада се из израза (181) – (183) одређује снага хлађења и температура хладног флуида на изласку (након што он преузме топлоту од топлог флуида) и температура топлог флуида на изласку (након што он топлоту преда хладном флуиду).

Снага размене енергије између топлог и хладног флуида може се израчунати и ако нису познати протоци, али су познате све четири температуре флуида (топлог и хладног, на уласку и изласку), што у одређеним ситуацијама у пракси може бити од интереса (у принципу је једноставније мерити температуру него проток). Након изражавања протока преко снаге пренете топлоте од топлог ка хладном флуиду и разлике температура, користећи изразе (182) и (183), а затим уврштавањем у (178), добија се

$$\ln \left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right) = K_p S \left(-\frac{\vartheta_{tul} - \vartheta_{tizl}}{q} - \frac{\vartheta_{hizl} - \vartheta_{hul}}{q} \right), \quad (184)$$

а одатле

$$q = \frac{K_p S (\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln \left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right)}. \quad (185)$$

Увођењем ознака

$$\Delta \vartheta_{izl} = \vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}$$

и

$$\Delta \vartheta_{ul} = \vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}$$

израз (185) постаје

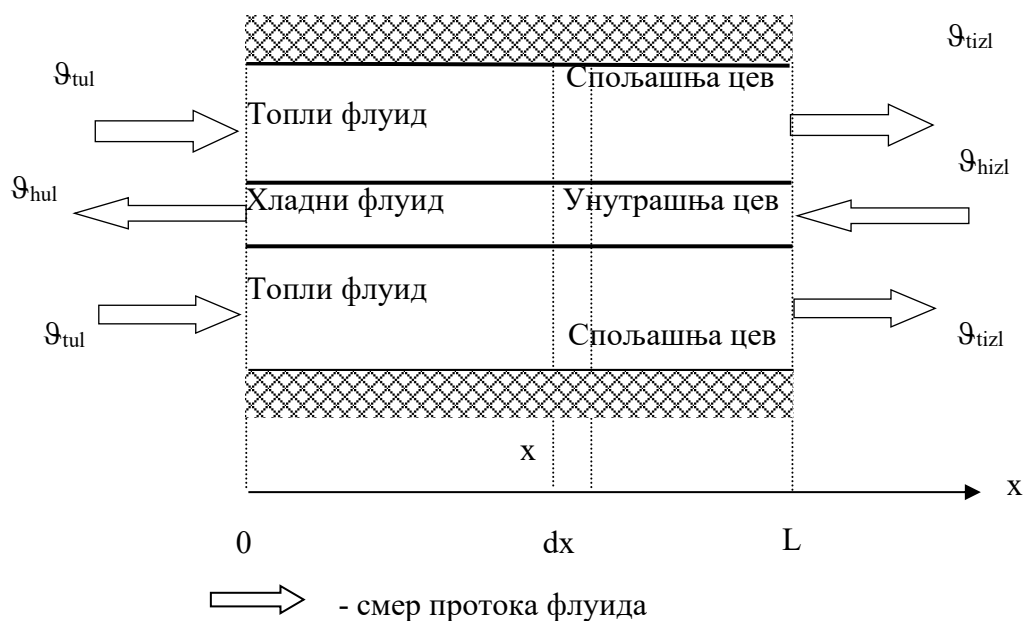
$$q = \frac{K_p S (\Delta \vartheta_{izl} - \Delta \vartheta_{ul})}{\ln \left(\frac{\Delta \vartheta_{izl}}{\Delta \vartheta_{ul}} \right)}. \quad (186)$$

Из (182) и (183) се може успоставити веза између температура

$$m_t c_{pt} (\vartheta_{tul} - \vartheta_{tizl}) = m_h c_{ph} (\vartheta_{hizl} - \vartheta_{hul}), \quad (187)$$

што је израз који може бити од користи при решавању неког практичног инжењерског проблема / задатка на испиту.

5.2.2. Размењивач топлоте у облику двоструке цеви са супротним смеровима струјања флуида



Слика 54

Елементарна снага која се на елементарном делу дужине цеви dx , на координати x , преноси од топлог ка хладном флуиду износи

$$dq = \pi d K_p (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) dx, \quad (188)$$

Изрази за елементарну снагу се могу написати и на следећи начин:

$$dq = -m_t c_{pt} d\vartheta_t(x) \quad (189)$$

(знак минус потиче од тога што је негативан градијент температуре топлог флуида у смеру x осе)

$$dq = -m_h c_{ph} d\vartheta_h(x) \quad (190)$$

(знак минус потиче од тога што је негативан градијент температуре хладног флуида у смеру x осе)

Изражавањем диференцијала температура из израза (189) и (190), а затим формирањем њихове разлике, добија се

$$d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) = \left(-\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) dq. \quad (191)$$

Заменом израза (188) у (189) и елементарном трансформацијом долази се до

$$\frac{d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x))}{\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)} = K_p \pi d \left(-\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) dx. \quad (192)$$

Интеграцијом претходне једначине у границама $[\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}, \vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}]$, односно $[0, L]$ добија се

$$\ln \frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} = K_p \left(-\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) S, \quad (193)$$

где S означава површину размењивача топлоте ($\pi d L$). Снага размене енергије између топлог и хладног флуида се може добити после исказивања сабирака из члана у загради на десној страни једначине преко снаге q . То се може учинити преко интеграције једначина (189) и (190), односно преко енергетских биланса за топли, односно хладни флуид. Интеграцијом са границама на уласку и изласку из размењивача топлоте:

$$q = m_t c_{pt} (\vartheta_{tul} - \vartheta_{tizl}) \quad (194)$$

$$q = m_h c_{ph} (\vartheta_{hul} - \vartheta_{hizl}) \quad (195)$$

На основу израза (193), (194) и (195), долази се до

$$\ln \left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right) = K_p S \left(-\frac{\vartheta_{tul} - \vartheta_{tizl}}{q} + \frac{\vartheta_{hul} - \vartheta_{hizl}}{q} \right) \Leftrightarrow, \quad (196)$$

а одатле

$$q = \frac{K_p S (\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln \left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right)}. \quad (197)$$

Увођењем ознака

$$\Delta \vartheta_{izl} = \vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}$$

и

$$\Delta \vartheta_{ul} = \vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}$$

израз (194) постаје

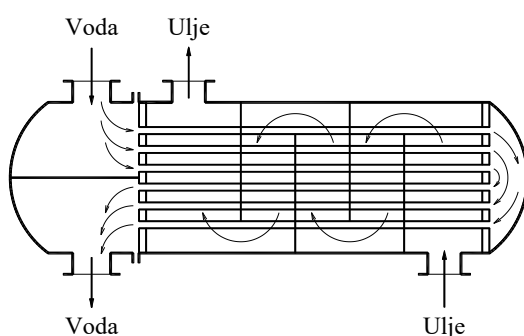
$$q = \frac{K_p S (\Delta \vartheta_{izl} - \Delta \vartheta_{ul})}{\ln \left(\frac{\Delta \vartheta_{izl}}{\Delta \vartheta_{ul}} \right)}. \quad (198)$$

Израз (198) је идентичан изразу (186) који је изведен за случај струјања флуида у истом смеру.

5.2.3. Размењивачи топлоте комплекснијег облика

На сликама 53 и 54 су приказане елементарне конфигурације размењивача топлоте које су имале академски, али не и практични значај. У пракси се користе размењивачи комплекснијих

облика, са основним циљем да читав размењивач заузме што мању запремину, односно да се по јединици заузетог простора има што већа површина преко које флуиди размењују топлоту. Једна стварна конструкција размењивача топлоте је приказана на слици 55 (на левој фотографији је приказан део хладњака у коме хладна вода улази у хладњак и из кога загрејава вода излази из хладњака, а на десној фотографији комора на супротном делу хладњака, у којој вода мења смер). Ова се конструкција по правилу користи код уљних енергетских трансформатора код којих је уље унутрашњи расхладни флуид (њиме се хлади активни део – намотаји и језгро), а вода спољашњи расхладни флуид (њоме се топлота преузима од уља и одводи у околину).

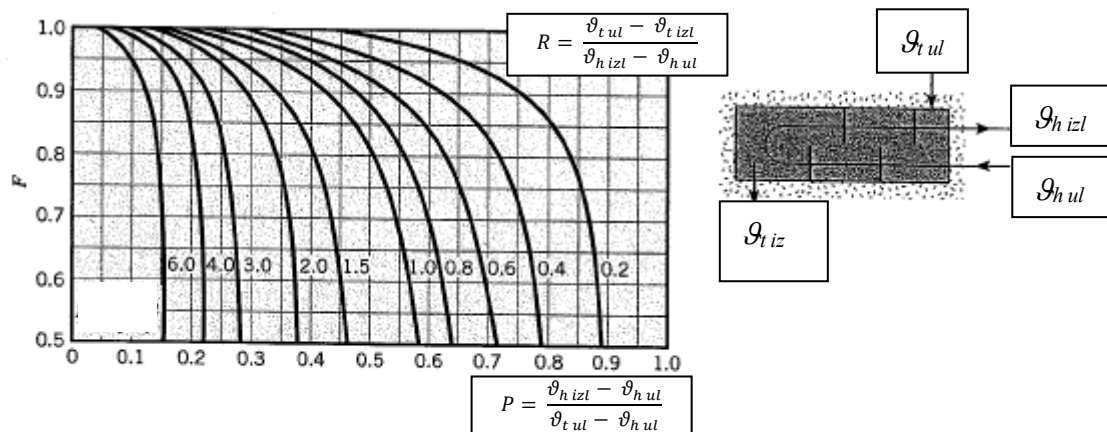


Слика 55

За типичне стварне облике размењивача топлоте, попут претходно наведеног, у литератури се могу наћи вредности коефицијената F , чијим се множењем са снагом елементарног размењивача топлоте која би се имала при истом коефицијенту преласка топлоте, истој површини хладњака и истим температурама, добија снага преноса топлоте од топлог ка хладном флуиду код реалног размењивача:

$$q = \frac{K_p S F (\Delta \vartheta_{izl} - \Delta \vartheta_{ul})}{\ln \left(\frac{\Delta \vartheta_{izl}}{\Delta \vartheta_{ul}} \right)} \quad (199)$$

За размењивач топлоте са слике 55 вредност коефицијената F се одређује са графика приказаног на слици 56.



Слика 56

5.2.4. Размењивачи топлоте са различитим површима према једном и другом флуиду

До сада је разматран случај да су површи ка сваком од флуида (S) једнаке. Ово у пракси често није случај, односно по правилу се повећава површина на страни на којој коефицијент преласка топлоте (α) има мању вредност. Разлог због кога се ово чини је да се постигне максимална ефикасност хладњака – циљ је постићи што већу снагу од топлог ка хладном флуиду, са хладњаком који заузима што мањи простор и захтева што мањи утрошак материјала. У случају неједнаких површи топлотни отпори преласку топлоте струјањем на страни топлог



флуида и на страни хладног флуида износе $1 / (\alpha_t S_t)$ и $1 / (\alpha_h S_h)$, респективно. Разлика површи се по правилу постиже оребрењем профила. На слици је приказано оребрење стране према ваздуху за размењивач топлоте уље / ваздух. Члан $1 / (\alpha_h S_h)$ (према ваздуху) се трансформише у $1 / (\eta_h \alpha_h S_h)$, где је η_h ефикасност ребра за хлађење. Члан којим се уважава топлотни отпор на цеви, пре ребара, остаје исти као да оребрења нема. Укупни топлотни отпор преласку топлоте са уља на ваздух износи

$$R^T = \frac{1}{\alpha_t S_t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\delta}{S_t} + \frac{1}{\eta_h \alpha_h S_h}, \quad (200)$$

5.2.5. Фактор задрљања размењивача топлоте

У досадашњем излагању је посматран идеализован случај да се коефицијент преноса топлоте са топлог на хладни флуид K_P током времена не мења. Подсетимо, он је дат изразом (175) и садржи компоненте преласка топлоте струјањем са топлог флуида на цев, провођењем кроз цев и струјањем са цеви на хладни флуид. Компоненте преласка топлоте струјањем зависе од брзине флуида, термичких параметара флуида и температуре. Провођење кроз цев зависи од дебљине цеви и топлотне проводности материјала цеви. Током рада хладњака долази до задрљања цеви, односно таложења материја са стране једног и другог флуида на површ цеви, које доводи до тога да се карактеристике размењивача топлоте (коефицијент преноса топлоте са топлог на хладни флуид) током времена мењају. Таложење у топлотном смислу доводи до појаве додатних отпора провођењу топлоте кроз сваки од два „нова слоја“ настала таложењем. Математички исказ, преко израза за коефицијент преноса топлоте са топлог на хладни флуид, гласи

$$K_P = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_S} + \frac{1}{\alpha_u} + \frac{\delta}{\lambda} + fD_S + fD_u}, \quad (201)$$

где fD_S представља додатни топлотни отпор по јединици површине услед наталожених материја на спољашњој страни цеви, а fD_u додатни топлотни отпор по јединици површине услед наталожених материја на унутрашњој страни цеви.

Из израза за снагу преноса топлоте (186) и (198) се види да се коефицијент преноса топлоте са хладног на топли флуид K_P множи са површи. У ситуацији када се површи према унутрашњем (S_u) и спољашњем (S_S) флуиду разликују, као површ се може узети једна од ових површи. Уколико се, на пример, као референтна узме површ ка унутрашњем флуиду S_u , коефицијент преласка топлоте за чист хладњак би износио (израз (175) важи за случај да су површи S_u и S_S сличне)

$$K_{Pcisto} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_S S_S} + \frac{1}{\alpha_u} + \frac{S_u \delta}{(S_u + S_S) \lambda}}, \quad (202)$$

(за топлотни отпор провођењу примењен је приближан израз да се топлота проводи кроз раван зид дебљине δ и површине попречног пресека једнаког средњој вредности унутрашње и спољашње површи $(S_u + S_S)/2$).

У случају различитих површи, израз (202) за чист хладњак се проширује додатним топлотним отпорима услед наталожених материја:

$$K_{Pzaprlljano} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_S S_S} + \frac{1}{\alpha_u} + \frac{S_u \delta}{(S_u + S_S) \lambda} + fD_{S S_S} + fD_u}. \quad (203)$$

Уколико је једна страна оребрена, вредност коефицијента преласка топлоте струјањем оребреној страни треба помножити са степеном ефикасности ребра η . Израз (203) за тај случај се трансформише у

$$K_{Pzaprlljano} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_S S_S} + \frac{1}{\eta_h \alpha_u} + \frac{\delta}{\lambda} + fD_{S S_S} + fD_u}. \quad (204)$$

III. Пример: размењивачи топлоте уље/вода на трансформатору снаге 380 MVA

Примена изложене теорије размењивача топлоте ће се илустровати на примеру трансформатора снаге 380 MVA, код кога се уље хлади преко размењивача топлоте уље-вода.

Блок-трансформатор на једној хидро електрани (трансформатор је трофазни, тронамотајни, са два ниженапонска намотаја, на која се прикључују генератори, и једним вишенапонским намотајем, ка мрежи) има називну снагу $2 \times 190 \text{ MVA} / 380 \text{ MVA}$, називни напон $U_{rl} = 15.75 \text{ kV}$, на ниженапонској страни и $U_{rh} = 420 \text{ kV}$, на вишенапонској страни. Називни губици трансформатора, одређени током фабричких пријемних испитивања, износе $P_{Fe} = 318 \text{ kW}$ (губици у празном ходу) и $P_{lr} = 780 \text{ kW}$ (губици услед оптерећења номиналном струјом при средњој температури намотаја од 75°C).

Пренос топлоте од уља, које се загрева услед губитака у активном делу трансформатора, ка спољњем расхладном флуиду (води) се врши преко два размењивача топлоте уље-вода, сваки спољњег пречника 300 mm и дужине 2.5 m , чија је конструкција приказана на слици 55. Вода струји кроз 105 цеви U профила, пречника $D = 15.7 \text{ mm}$. Површ суда, са кога се топлота са уља преноси природним струјањем ваздуха, износи $S_t = 160 \text{ m}^2$, а његова висина $L = 4 \text{ m}$.

На трансформатору су обављена мерења у стационарном топлотном стању при оптерећењу 362 MVA, чему одговара снага губитака од 1026 kW. На трансформатор је постављен одређен број термопарова за мерење температура у карактеристичним тачкама – уље у цеу, уље на уласку и изласку из размењивача топлоте, вода на уласку и изласку из размењивача топлоте, температура амбијента и температура суда. Последње две вредности су битне за одређивање снаге којом се топлота одводи са површи суда ка околном ваздуху. Израчунавање ове компоненте снаге, као резултата преноса топлоте природним струјањем ваздуха уз спољашњу површ суда, неће се излагати, већ ће се дати само резултат прорачуна. Детаљи се могу наћи у http://elektrotermija.etf.bg.ac.rs/paper_3.pdf.

Мерења су показала да постоји потпуна симетрија између једног и другог размењивача топлоте.

Мерења су извршена пре и после чишћења цеви U профила, са унутрашње стране, кроз које протиче вода. Спољна страна цеви U профила, преко које струји уље, није чишћена. Вредности карактеристичних температура, које су коришћене у наставку текста, приказане су у Табели П1-1.

Табела П1-1 – Измерене вредности карактеристичних температура

	$\vartheta_{uul} (^{\circ}\text{C})$	$\vartheta_{uizl} (^{\circ}\text{C})$	$\vartheta_{vul} (^{\circ}\text{C})$	$\vartheta_{vizl} (^{\circ}\text{C})$
После чишћења	54.5	34.5	6.5	17.1
Пре чишћења	60.1	40.5	6.7	17.4

Термичким прорачунима, на основу вредности температура амбијента и површи суда, добијене су вредности снага хлађења преко површи суда на ваздух, а по њиховом одузимању од снаге губитака и дељењем разлике са 2, и снаге преноса топлоте са уља на воду у сваком од хладњака. Вредности су приказане у Табели П1-2.

Табела П1-2 – Снага преноса топлоте са површи суда и кроз сваки од хладњака

	$P_{sa\ suda} \text{ (kW)}$	$P_{hladnjaka} \text{ (kW)}$
После чишћења	20.45	501.5
Пре чишћења	22.82	503

Термичким прорачунима (детаљи се могу видети у http://elektrotermija.etf.bg.ac.rs/paper_3.pdf), користећи изразе за коефицијенте преласка топлоте струјањем доступне у литератури за а) „једноставно“ струјање воде кроз цев и б) попречно струјање уља преко снопа цеви, као и вредности познате брзине струјања флуида, дошло се до вредности коефицијената преласка топлоте са уља на цев $\alpha_{ulja} = 3196 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ и са цеви на воду $\alpha_{vode} = 2510 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Вредност топлотног отпора (по јединици површи) провођењем кроз цев износи $R_{\lambda\ cevi} = 2.653 \cdot 10^{-6} \text{ (K/W) m}^2$.

На бази ових података израчунати су фактори запрљања на странама хладњака према уљу и према води на следећи начин.

Из израза (199), полазећи од измерених температура уља и воде, снага која се од уља ка води преноси у сваком од хладњака, укупне површине свих 105 цеви U профила и коефицијента F одређеног са графика на слици 56, долази се до вредности коефицијента преноса топлоте са уља на воду: после чишћења стране цеви кроз коју протиче вода $K_{P\ cisto\ voda} = 608 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ($fD_u = 0$) и пре чишћења стране цеви кроз коју протиче вода $K_{P\ prljavo} = 520 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. У идеалном случају, када су чисте обе стране, и према уљу и према води, коришћењем израза (201), у коме су $fD_u = 0$ и $fD_s = 0$, а $\alpha_s (\equiv \alpha_{ulja}) = 3196 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ и $\alpha_u (\equiv \alpha_{vode}) = 2510 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$, добија се да вредност коефицијента преноса топлоте са уља на воду износи $K_{P\ cisto} = 1401 \text{ W/m}^2 \text{ K}$.

Према (201),

$$\frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + fD_u + fD_s = \frac{1}{K_{Pprljavao}}$$

$$\frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + fD_u = \frac{1}{K_{Pcistovoda}}$$

$$\frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{K_{Pcisto}}$$

Одавде се добија:

$$fD_u = \frac{1}{K_{Pcistovoda}} - \frac{1}{K_{Pcisto}}$$

$$fD_s = \frac{1}{K_{Pprljavao}} - \frac{1}{K_{Pcistovoda}} = \frac{1}{K_{Pprljavao}} - \frac{1}{K_{Pcisto}} - fD_u$$

Резултат израчунавања:

- са унутрашње стране, према води $fD_u = 0.0002781$, $1 / fD_u = 3596 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$
- са спољашње стране, према уљу $fD_s = 0.000391$, $1 / fD_s = 2558 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$

Напомене:

1. Опционо, K_{Pcisto} је могао бити одређен мерењима након чишћења и стране размењивача топлоте према уљу.
2. Током рада трансформатора постоји генерални тренд пораста фактора запрљања, што као последицу има повећање температуре уља (губици у трансформатору су константни), која представља једну од основних величина које се приказују и прате у системима за мониторинг трансформатора. Дакле, преко те температуре техничка служба може да уочи потребу за чишћењем хладњака. Ова одлука се може донети коришћењем једноставног праћења тренутне вредности температуре, или софистицираних алгоритама предвиђања на бази вредности регистрованих у прошлости.