



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

Катедра за енергетске претвараче и погоне

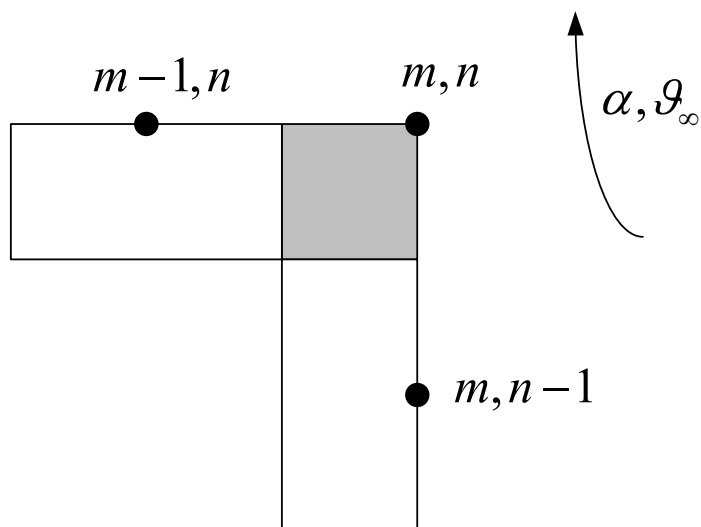
Термички процеси у електроенергетици

Материјали за рачунске вежбе 7-9

Новембар 2015.

Задатак 9

Извести израз за методу коначних елемената за елемент топлопроводне средине приказан на слици. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре користити имплицитну методу. Познати су сви подаци о карактеристикама материјала и коефицијенту преласка топлоте струјањем са тела на околни флуид температуре ϑ_∞ . Дискретизација топлопроводне средине је извршена тако да је $\Delta x = \Delta y$.



Решење задатка

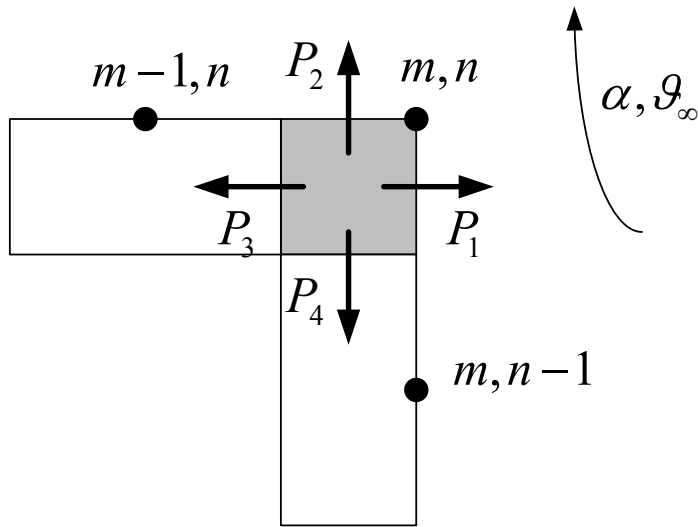
При постављању једначина по методи коначних елемената користимо исти поступак као у задатку 7. Једина разлика биће у дискретизацији извода температуре посматраног елемента по времену (у овом случају се користи имплицитна метода).

На основу биланса снага (који директно следи из енергетског биланса) примењеног на посматрани елемент (слика), може се написати следећа једначина:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (9.1)$$

где су P_{gen} укупна снага којом се топлотна енергија генерише унутар посматраног елемента, P_{akum} укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и $P_{prenosa}$ снага којом се енергија размењује са осталим елементима и флуидом.

Снага којом се топлотна енергија размењује са околином има више компонената које су означене на слици и могу се изразити преко одговарајућих температура и параметара средине.



$$P_1 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{1} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L \quad (9.2)$$

$$P_2 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{1} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L \quad (9.3)$$

$$P_3 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2}} \cdot L \quad (9.4)$$

$$P_4 = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2}} \cdot L \quad (9.5)$$

У овом случају, за разлику од задатка 7, са $p+1$ је означен садашњи тренутак. Укупна снага којом се енергија преноси ка околина износи:

$$P_{prenosa} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad (9.6)$$

Заменом израза (9.2), (9.3), (9.4) и (9.5) у једначину (9.6) се добија коначан израз за снагу којом се топлота преноси ка околина:

$$P_{prenosa} = \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta y}{2}} \cdot L + \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{\infty}}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{2}} \cdot L + \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2}} \cdot L + \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2}} \cdot L \quad (9.7)$$

Снага којом се топлотна енергија генерише у посматраној запремини износи:

$$P_{gen} = q_V \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (9.8)$$

Снага којом се топлотна енергија акумулише у посматраној запремини износи:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_{m,n}}{\partial t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (9.9)$$

Извод температуре посматраног елемента по времену, који фигурише у (9.9), може се дискретизовати и апроксимирати као количник разлике температура посматраног елемента у садашњем и претходном тренутку и корака временске дискретизације.

$$\frac{d\mathcal{G}_{m,n}}{dt} \approx \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (9.10)$$

Заменом (9.10) у (9.9) се добија коначан израз за снагу којом се енергија акумулише:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (9.11)$$

Заменом (9.7), (9.8) и (9.11) у (9.1) се добија:

$$\begin{aligned} q_V \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{\infty}}{1} + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{\infty}}{1} + \\ + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Даљим сређивањем претходне једначине се добија:

$$\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} \cdot (1 + 4 \cdot Fo + 4 \cdot Fo \cdot Bi) - 2 \cdot Fo \cdot (\mathcal{G}_{m-1,n}^{p+1} + \mathcal{G}_{m,n-1}^{p+1}) = 4 \cdot Fo \cdot Bi \cdot \mathcal{G}_{\infty} + \mathcal{G}_{m,n}^p \quad (9.13)$$

где су Fourier-ов и Biot-ов број дати следећим изразима:

$$Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \quad (9.14)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (9.15)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} \quad (9.16)$$

Задаци из збирке рађени на часовима рачунских вежби:

Задаци 15,16 (са применом радијационих шема),17,18,24,25,26,27

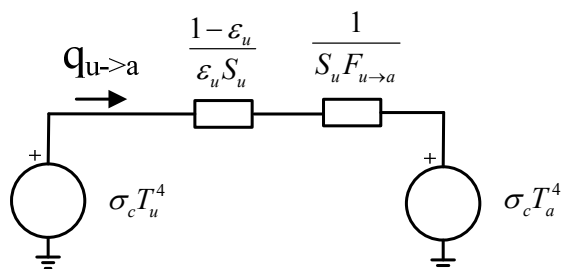
<http://term-procesi.etf.rs/dokumenti/vezbe%20na%20tabli/ZbirkaDeo2.pdf>

Задатак 10

Цев пречника $D_u = 5$ cm, емисивности $\varepsilon_u = 0.8$ и температуре $\vartheta_u = 800$ °C се налази у слободном простору температуре 20 °C. За колико се смањи снага преноса топлоте зрачењем од цеви ако се она постави у цев (екран) чији је пречник унутрашње површи $D_{su} = 7$ cm, њена емисивност $\varepsilon_{su} = 0.2$, док је пречник спољашње површи екранске цеви $D_{ss} = 8$ cm, а емисивности $\varepsilon_{ss} = 0.8$? Сматрати да је отпор преносу топлоте кроз цев занемарљиво мали.

Решење задатка

У случају да екран није постављен, спољашња површ цеви и амбијент образују затворен простор.. Размена енергије зрачењем између површи које образују затворен простор може се анализирати на основу следеће радијационе шеме (слика).



За практичну употребу радијационих шема потребно је познавати факторе виђења између одговарајућих површи. У овом случају није потребно решавати површинске интеграле да би се одредили фактори виђења.

Пошто сва енергија емитована са површи цеви доспева у амбијент, на основу дефиниције фактора виђења се закључује следеће:

$$F_{u \rightarrow a} = \frac{Q_{u \rightarrow a}}{Q_{uk}} = 1 \quad (10.1)$$

где је $Q_{u \rightarrow a}$ енергија која, емитована са површи цеви, стиже у амбијент, а Q_{uk} је укупна енергија емитована са површи цеви. Израз (10.1) би важио и када би се енергије замениле одговарајућим снагама.

$$F_{u \rightarrow u} + F_{u \rightarrow a} = 1 \Rightarrow F_{u \rightarrow u} = 1 - F_{u \rightarrow a} = 0 \quad (10.2)$$

Енергија емитована у амбијенту само делом стиже на површ цеви, док остатак енергије завршава у амбијенту. Због тога је фактор виђења $F_{a \rightarrow u} < 1$.

$$F_{a \rightarrow u} \cdot S_a = F_{u \rightarrow a} \cdot S_u \Rightarrow F_{a \rightarrow u} = F_{u \rightarrow a} \cdot \frac{S_u}{S_a} = \frac{S_u}{S_a} \rightarrow 0 \quad (10.3)$$

јер $S_a \rightarrow \infty$.

Укупна енергија која се размењује између спољашње површи цеви и амбијента износи:

$$q_{u \rightarrow a} = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_a^4)}{\frac{1 - \varepsilon_u}{S_u \varepsilon_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow a}}} = \varepsilon_u S_u \sigma_c (T_u^4 - T_a^4) \quad (10.4)$$

Након постављања екрана, енергија се зрачењем преноси између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана и између спољашње површи екрана и амбијента. Снага која се размењује између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана по јединици дужине износи:

$$q_{u \rightarrow su} = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_s^4)}{\frac{1 - \varepsilon_u}{\varepsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{su} S_{su}}} \quad (10.5)$$

где је T_s температура екрана, а $F_{u \rightarrow su}$ фактор виђења између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана. Пошто сва енергија емитована са спољашње површи цеви доспева на унутрашњу површ екрана, закључује се да је $F_{u \rightarrow su} = 1$.

Екран је танак и отпор преносу топлоте између унутрашње и спољашње површи екрана је занемарљиво мали. Због тога се може сматрати да су температуре спољне и унутрашње површи приближно једнаке.

Снага која се размењује између спољашње површи екрана и амбијента по јединици дужине износи:

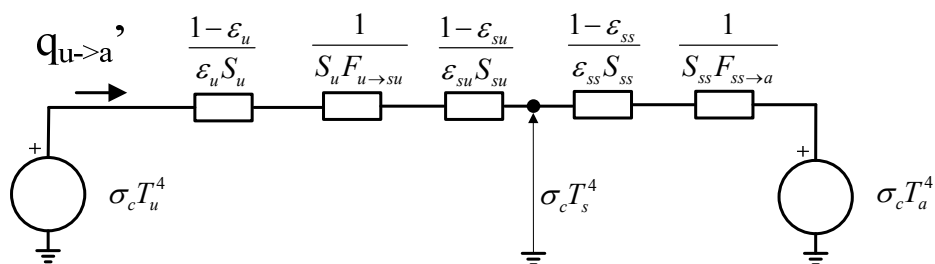
$$q_{ss \rightarrow a} = \frac{\sigma_c (T_s^4 - T_a^4)}{\frac{1 - \varepsilon_{ss}}{\varepsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \quad (10.6)$$

Пошто нема генерисања топлотне енергије у екрану, закључује се да је:

$$q_{u \rightarrow su} = q_{ss \rightarrow a} = q_{u \rightarrow a} \quad (10.7)$$

Из (10.5), (10.6) и (10.7) следи снага која се зрачењем размењује између цеви и амбијента:

$$q_{u \rightarrow a} = \frac{1}{\frac{1 - \varepsilon_u}{\varepsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{su} S_{su}} + \frac{1 - \varepsilon_{ss}}{\varepsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \sigma_c (T_u^4 - T_a^4) \quad (10.8)$$



Однос поменутих снага износи:

$$\begin{aligned} \frac{q_{u \rightarrow a}}{q_{u \rightarrow a}} &= \frac{\epsilon_u S_u \sigma_c (T_u^4 - T_a^4)}{1} = \\ &= \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_a^4)}{\frac{1 - \epsilon_u}{\epsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \epsilon_{su}}{\epsilon_{su} S_{su}} + \frac{1 - \epsilon_{ss}}{\epsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \\ &= \frac{\epsilon_u S_u}{1} = 3.91 \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$F_{u \rightarrow su} = 1;$$

$$F_{ss \rightarrow a} = 1;$$

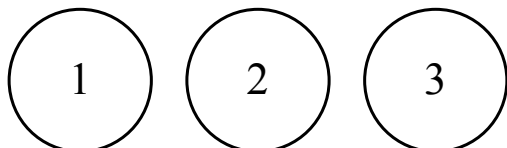
$$S_u = D_u \pi L;$$

$$S_{su} = D_{su} \pi L;$$

$$S_{ss} = D_{ss} \pi L;$$

Задатак 11

Уколико се све три фазе сувог електроенергетског трансформатора који се хлади ваздухом и који се налази у просторији температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ направе на исти начин, средња фаза је нешто топлија од крајњих фаза. Разлог томе је мања снага која се зрачењем одводи са спољашњих површи високонапонских (спољних) намотаја средишње фазе. Написати математички исказ хлађења средишње и крајњих фаза из којих се то види, користећи теорију размене топлоте зрачењем (преко фактора виђења).



Решење задатка

Спољашње површи фаза 1, 2 и 3 и амбијент образују затворен простор, те се пренос топлоте зрачењем може анализирати на основу фактора виђења и одговарајућих шема зрачења.

Означимо са F_{12} фактор виђења између фазе 1 и 2. Због симетрије се закључује да су фактор виђења између фаза 1 и 2 и фактор виђења између фаза 3 и 2 једнаки.

$$F_{32} = F_{12} \quad (11.1)$$

Такође се из геометрије проблема закључује да је фактор виђења између фаза 1 и 3 једнак нули:

$$F_{13} = 0 \quad (11.2)$$

Означимо са q_{12} снагу која се зрачењем размењује између фаза 1 и 2. На основу енергетског биланса, примењеног на фазу 1, следи:

$$q_1 = q_{12} + q_{1a} \quad (11.3)$$

где је q_1 укупна снага зрачења са површи фазе 1. Делјењем једначине (11.3) са q_1 се добија:

$$1 = \frac{q_{12}}{q_1} + \frac{q_{1a}}{q_1} \quad (11.4)$$

На основу дефиниције фактора виђења, једначина (11.4) се може написати у следећем облику:

$$1 = F_{12} + F_{1a} \quad (11.5)$$

Из једначине (11.5) и симетрије фаза 1 и 3 следи да фактори виђења између фазе 1 и амбијента, односно фазе 3 и амбијента износе:

$$F_{1a} = F_{3a} = 1 - F_{12} \quad (11.6)$$

На основу енергетског биланса, примењеног на фазу 2, следи:

$$q_2 = q_{21} + q_{23} + q_{2a} \quad (11.7)$$

где је q_2 укупна снага зрачења са површи фазе 2. Дељењем једначине (11.7) са q_2 се добија:

$$1 = \frac{q_{21}}{q_2} + \frac{q_{23}}{q_2} + \frac{q_{2a}}{q_2} \quad (11.8)$$

На основу дефиниције фактора виђења, једначина (11.8) се може написати у следећем облику:

$$1 = F_{21} + F_{23} + F_{2a} \quad (11.9)$$

За факторе виђења важе следеће релације:

$$F_{21} \cdot S_2 = F_{12} \cdot S_1 \quad (11.10)$$

$$F_{23} \cdot S_2 = F_{32} \cdot S_3 \quad (11.11)$$

Пошто важи да је $S_1 = S_2 = S_3 = S$, следи да су одговарајући фактори виђења једнаки.

$$F_{21} = F_{12} \quad (11.12)$$

$$F_{23} = F_{32} \quad (11.13)$$

На основу (11.1), (11.9), (11.12) и (11.13) следи да фактор виђења између фазе 2 и амбијента износи:

$$F_{2a} = 1 - 2 \cdot F_{12} \quad (11.14)$$

Ако претпоставимо да су температуре све три фазе приближно исте и једнаке (T), до клађења долази само између спољних површи намотаја и амбијента.

$$q_{1a} = q_{3a} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{F_{1a}S}\right)} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-F_{1a})S}\right)} \quad (11.15)$$

$$q_{2a} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-2F_{1a})S}\right)} \quad (11.16)$$

$$\frac{q_{1a}}{q_{2a}} = \frac{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-2F_{1a})S}\right)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-F_{1a})S}\right)} > 1 \quad (11.17)$$

Закључак: при истој температури све три фазе, већа је снага којом се топлота преноси ка околини зрачењем са крајњих фаза него са средње фазе.