

Prenos toplote zračenjem

Zračenje kao oblik prenosa toplote sa površi tela nastaje pri temperaturama površi većim od apsolutne nule. Za njegovu egzistenciju nije potrebno postojanje materijalne sredine, za razliku od provodjenja i strujanja, jer se kod zračenja toplota prenosi elektromagnetnim talasima.

Osnovni zakoni zračenja su izloženi u *Priručniku za laboratorijske vežbe* (u okviru druge vežbe). Oni povezuju osnovne veličine zračenja (temperaturu i površinske gustine snage zračenja, i to monohromatske i ukupne - za sve talasne dužine). Njihovom direktnom primenom se može rešiti izvestan broj praktičnih problema.

Emisiona svojstva površi tela utiču na spektralne i prostorne odlike zračenja. Ova svojstva se najčešće izražavaju u odnosu na referentno crno telo. Crno telo apsorbuje sva upadna zračenja, nezavisno od talasne dužine i pravca. Osim toga, bilo kakva površ, koja se nalazi na istoj temperaturi kao crno telo, zrači manje energije od crnog tela. Monohromatska površinska gustina snage zračenja sa površi crnog tela je određena *Planck*-ovim zakonom. Kao idealna osobina zračenja, crnom telu se dodeljuje karakteristika da energiju u prostor zrači difuzno, što znači da je jačina zračenja sa elementarnog dela površi, podeljena sa površinom elementarne površi projektovanom na pravac zračenja, ista u svim pravcima. Jačina zračenja se definiše kao elementarna snaga koja se zrači u elementarni prostorni ugao. Emisiona svojstva realnih površi se opisuju preko spektralne emisivnosti, definisane kao odnos monohromatske površinske gustine snage zračenja realne površi i monohromatske površinske gustine snage zračenja površi crnog tela iste temperature. Ukoliko se ovaj odnos ne menja sa talasnom dužinom i ima vrednost manju od jedan, telo se definiše kao idealno sivo. Na isti način kao emisiona, mogu se definisati apsorpciona svojstva za upadna zračenja na površ tela.

Za crno telo je često pogodno uvesti pojam zračenja u opsegu talasnih dužina. U literaturi se daju tablice odnosa površinskih gustina snaga zračenja u opsegu talasnih dužina $[0, \lambda^*]$ i ukupne površinske gustine snage zračenja (određene *Stefan-Boltzmann*-ovim zakonom):

$$F_{(0-\lambda^*)} = \frac{\int_0^{\lambda^*} q_{s\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} q_{s\lambda} d\lambda} \quad (12)$$

$$F_{(0-\lambda^*)} = \frac{\int_0^{\lambda^*} c q_{S\lambda} d\lambda}{\sigma_c T^4} = \int_0^{\lambda^* T} \frac{c q_{S\lambda}}{\sigma_c T^5} d(\lambda T) \quad (13)$$

$$F_{(0-\lambda^*)} = \int_0^{\lambda^* T} \frac{1}{\sigma_c T^5} \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} d(\lambda T) = f(\lambda T) \quad (14)$$

U tablici 1 (preuzetoj iz [3]) su date vrednosti $F_{(0-\lambda^*)}$ u funkciji veličine $\lambda^* T$.

Tablica 1

λT ($\mu\text{m K}$)	$F_{(0-\lambda)}$	λT ($\mu\text{m K}$)	$F_{(0-\lambda)}$	λT ($\mu\text{m K}$)	$F_{(0-\lambda)}$
200	.000000	4200	.516014	8500	.874608
400	.000000	4400	.548796	9000	.890029
600	.000000	4600	.579280	9500	.903085
800	.000016	4800	.607559	10000	.914199
1000	.000321	5000	.633747	10500	.923710
1200	.002134	5200	.658970	11000	.931890
1400	.007790	5400	.680360	11500	.939959
1600	.019718	5600	.701046	12000	.945098
1800	.039341	5800	.720158	13000	.955139
2000	.066728	6000	.737818	14000	.962898
2200	.100888	6200	.754140	15000	.969981
2400	.140256	6400	.769234	16000	.973814
2600	.183120	6600	.783199	18000	.980860
2800	.227897	6800	.796129	20000	.985602
3000	.273232	7000	.808109	25000	.992215
3200	.318102	7200	.819217	30000	.995340
3400	.361735	7400	.829527	40000	.997967
3600	.403607	7600	.839102	50000	.998953
3800	.443382	7800	.848005	75000	.999713
4000	.480877	8000	.856288	100000	.999905

Značajnu teškoću kod proračuna razmene energije zračenjem između površi tela predstavlja određivanje dela ukupne energije zračenja sa površi jednog tela koji se elektromagnetnim talasima prenosi do površi svakog od preostalih tela. U vezi sa tim, razvijena je teorija razmene toplote između tela zračenjem, zasnovana na "faktorima vidjenja" i šemama zračenja. Postavka na kojoj je ona izgrađena je da površi tela zrače difuzno.

"Faktor vidjenja" $F_{i \rightarrow j}$ se definiše kao odnos dela energije koji se emituje sa površi tela i koji stigne do površi tela j i ukupne energije koja se emituje sa površi i .

Elementarna snaga koja se sa elementarne površi tela i (dS_i) emituje do elementarne površi tela j (dS_j), slika 1, iznosi

$$dq_{i \rightarrow j} = I_{\gamma_i, S} dS_i d\omega_{i \rightarrow j},$$

odnosno

$$dq_{i \rightarrow j} = I_{\gamma_i, S} dS_i \frac{dS_j \cos \gamma_j}{R^2}. \quad (15)$$

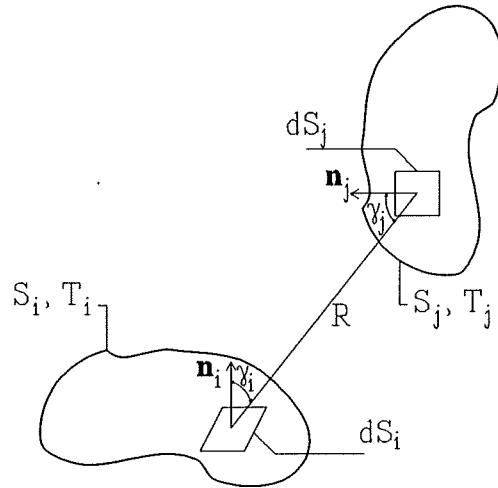
$I_{\gamma_i, S}$ označava jačinu zračenja sa elementarnog dela površi u pravcu koji sa normalom zaklapa ugao γ_i , podeljenu sa površinom elementarne površi, dS_i i dS_j površine elementarnih površi tela i i j (koristi se ista oznaka za elementarni deo površi i njenu površinu), $d\omega_{i \rightarrow j}$ elementarni prostorni ugao pod kojim se sa elementarne površi dS_i vidi elementarna površ dS_j i R rastojanje između elementarnih površi dS_i i dS_j .

Za slučaj da se raspodela zračenja u poluprostor sa elementarnog dela površi S_i vrši po Lambert-ovom zakonu (II.5), što važi kod površi difuznih karakteristika,

$$I_{\gamma_i, S} = I_{0, S} \cos \gamma_i,$$

izraz (15) postaje

$$dq_{i \rightarrow j} = I_{0, S} \cos \gamma_i dS_i \frac{dS_j \cos \gamma_j}{R^2},$$



Slika 1

odnosno, prema vezi izmedju jačine zračenja sa elementarnog dela površi u pravcu normale, podeljenu sa površinom elementarne površi, i ukupne površinske gustine snage zračenja,

$$I_{0,s} = \frac{q_s}{\pi},$$

koji će biti izveden u zadatku 18:

$$dq_{i \rightarrow j} = \frac{1}{\pi} q_s \cos \gamma_i dS_i \frac{dS_j \cos \gamma_j}{R^2}$$

$$dq_{i \rightarrow j} = q_s \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_i dS_j$$

Ukupna snaga prenosa energije od površi i ka površi j se dobija integracijom elementarnih snaga:

$$q_{i \rightarrow j} = q_s \iint_{S_i, S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_i dS_j \quad (16)$$

Jasno je da je prethodni izraz postavljen pod pretpostavkom da je konstantna temperatura po površi tela i , jer je površinska gustina snage, koja zavisi od temperature, izvedena ispred integrala.

Prema definiciji, "faktor vidjenja" se određuje prema izrazu

$$F_{i \rightarrow j} = \frac{q_{i \rightarrow j}}{q_s S_i} = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i, S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_i dS_j. \quad (17)$$

Za "faktor vidjenja" $F_{j \rightarrow i}$ se, pod istim pretpostavkama (da je površ S_j izotermička i da ima difuziona svojstva zračenja), analogno dobija

$$F_{j \rightarrow i} = \frac{1}{S_j} \iint_{S_i, S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_i dS_j,$$

odakle se dolazi do važne relacije izmedju "faktora vidjenja"

$$S_i F_{i \rightarrow j} = S_j F_{j \rightarrow i}. \quad (18)$$

Kada n površi proizvoljnog oblika obrazuju zatvoren prostor, kao na primer na slici 2, prema definiciji "faktora vidjenja" i zakona održanja energije se mogu postaviti jednakosti

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, N}. \quad (19)$$

"Faktor vidjenja" F_{ij} ima vrednost nula za ravne i konveksne (ispupčene) površi. Za konkavne, njegova vrednost je veća od nule. Ako zatvorenu površ ograničava N površi, ukupno postoji N^2 "faktora vidjenja". Navedena dva pravila, data izrazima (18) i (19), omogućavaju da direktno ne mora da se određuje svih N^2 , već samo

$$N^2 - \frac{N(N-1)}{2} - N = \frac{N(N-1)}{2} \quad (20)$$

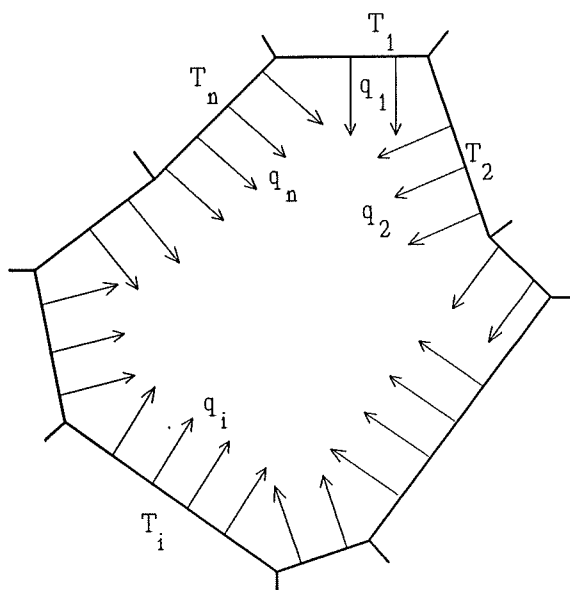
"faktora vidjenja".

"Faktori vidjenja" se u inženjerskoj praksi određuju analitički, prema definiciji (za neke elementarne slučajeve), prema izvedenim pravilima i prema formulama koje se mogu naći u literaturi za neke karakteristične slučajeve.

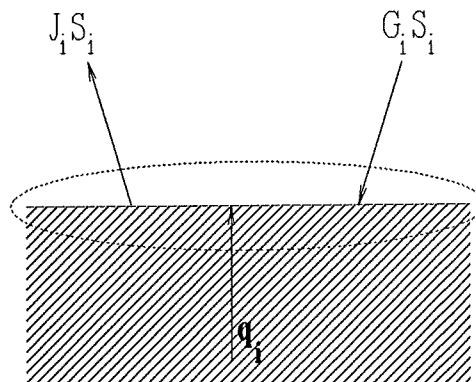
Sada će se sprovesti teorijske analize na osnovu kojih se postavljaju radijacione šeme. Pomoću radijacionih šema se rešava veliki broj praktičnih problema kod elektrotermičkih uređaja i peći kod kojih se javlja prenos toplote zračenjem.

Posmatrajmo jednu površ tela (površine S_i), sa koje se zračenjem odvođi energija snagom $J_i S_i$, a na nju dovodi snagom $G_i S_i$ (sa površi tela sa kojima se energija razmenjuje zračenjem) - slika 3.

Da bi se održalo takvo stacionarno stanje, do površi tela je potrebno dovoditi energiju snagom



Slika 2



Slika 3

$$q_i = S_i (J_i - G_i). \quad (21)$$

Površinska gustina snage kojom se zračenjem energija odvodi sa površi tela je jednaka zbiru snage zračenja sa površi tela temperature T u slobodan prostor i reflektovane komponente upadnog zračenja

$$J_i = E_i + \rho_i G_i. \quad (22)$$

S obzirom da je veza izmedju koeficijenata apsorpcije i refleksije $A_i = 1 - \rho_i$ (ne tretira se transmisija), prema (21) i (22), snaga dovodjenja energije do površi se može odrediti prema izrazu koji je pogodan za razumevanje energetskog bilansa i koji glasi

$$q_i = S_i (E_i - A_i G_i).$$

Za idealno sivo telo koeficijenta sivoće ε_i , koji je jednak koeficijentu apsorpcije A_i ($\varepsilon_i = A_i$), izraz (22) se može napisati u formi

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + (1 - \varepsilon_i) G_i, \quad (23)$$

gde je E_{bi} površinska gustina snage zračenja crnog tela čija je temperatura jednaka temperaturi posmatrane površi. Rešavanjem prethodne jednačine po G_i i zamenom u (21), dobija se

$$q_i = S_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1 - \varepsilon_i} \right),$$

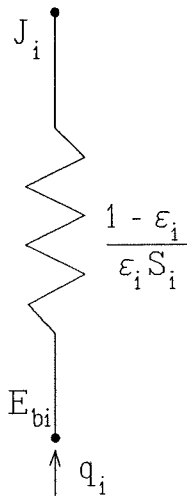
odnosno

$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{\varepsilon_i S_i}. \quad (24)$$

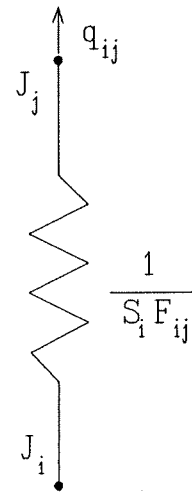
Ova jednakost se može prikazati elementom mreže prikazanim na slici 4.

Za određivanje snage dovodjenja energije do površi q_i neophodno je poznavati vrednost snage prenosa toplote zračenjem od površi (J_i). Za to se mora sprovesti analiza razmene energije zračenjem sa svim površima sa kojima se ona vrši.

Snaga kojom se energija zračenjem dovodi do površi i , sa N difuznih površi proizvoljnog oblika koje formiraju zatvoren prostor (uključujući i samu površ i), je jednaka



Slika 4



Slika 5

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^N F_{ji} S_j J_j, \quad (25)$$

odnosno

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} S_i J_j.$$

Skraćivanjem površina S_i u prethodnom izrazu i smenom tako dobijenog izraza za G_i u izraz (21), dobija se

$$q_i = S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \right),$$

odnosno, prema (19),

$$q_i = S_i \left(\sum_{j=1}^N F_{ij} J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \right).$$

Dakle,

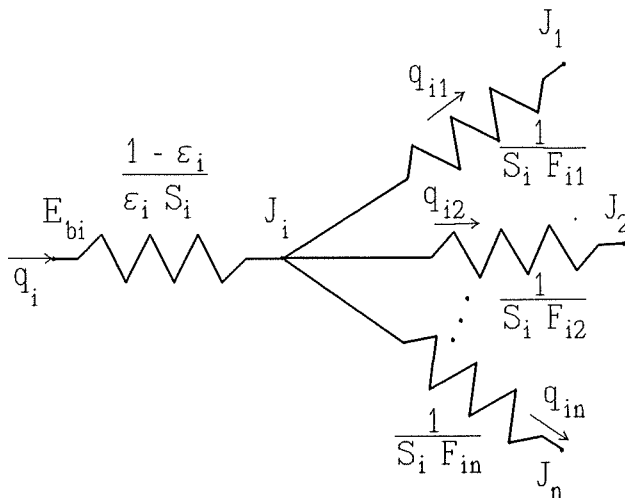
$$q_i = \sum_{j=1}^N S_i F_{ij} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^N q_{ij}, \quad (26)$$

što znači da je potrebna snaga dovodjenja energije površi i jednaka zbiru snaga razmene toplote između površi i i ostalih površi (snaga razmene energije između površi i i neke od preostalih površi ima pozitivan predznak ako se prenosi od površi i). Razmena energije između površi i i svake od preostalih površi se može prikazati elementom mreže prikazanim na slici 5.

Iz jednačina (24) i (26) se dobija

$$\frac{\frac{E_{bi} - J_i}{1 - \epsilon_i}}{\epsilon_i S_i} = \sum_{j=1}^N \frac{J_i - J_j}{S_i F_{ij}} \quad (27)$$

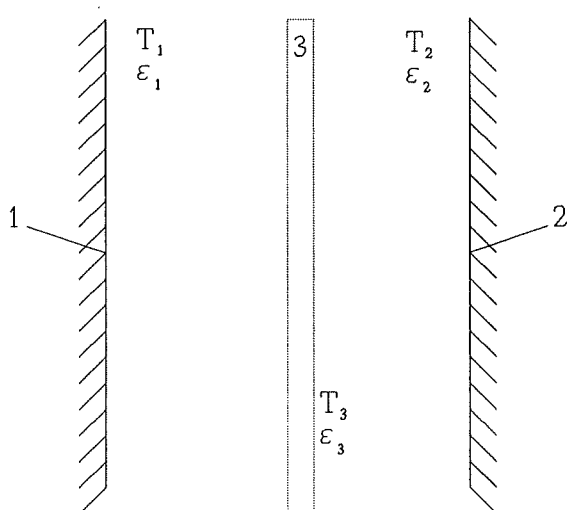
Na osnovu ove jednakosti se može nacrtati mreža koja odgovara energetsom bilansu jedne površi. Ona je prikazana na slici 6.



Slika 6

Sledeći ove principe i za ostale površi, moguće je formirati kompletnu otpornu mrežu i na bazi nje odrediti željene vrednosti (za rešavanje je potrebno zadavanje dovoljnog broja temperatura površi T_i , što znači zadavanje E_{bi} (veza između T_i i E_{bi} je izražena *Stefan-Boltzmann*-ovim zakonom zračenja crnog tela) ili snaga koje se provodjenjem dovode do površi tela q_i).

Prva dva zadatka u poglavlju se takodje mogu rešiti primenom ove teorije, ali su kao uvodni rešavani na elementaran način, primenom zakona o održanju energije.



Slika 15.1

15. a) Izvesti izraz za površinsku gustinu snage kojom se energija razmenjuje zračenjem između dve paralelne velike površi 1 i 2, koje se nalaze na temperaturama T_1 i T_2 i čije površi imaju svojstva idealno sivog tela, koeficijenta sivoće ε_1 i ε_2 , respektivno. Apsorpciona svojstva površi su karakterisana koeficijentima apsorpcije, koji su jednaki koeficijentima sivoće (emisivnostima).

Zbog veličine površi se može smatrati da su ivični efekti zanemarljivo mali.

b) Kakav se efekat postiže postavljanjem zastora (ekrana) između tih površi? Koeficijent sivoće ekrana (ploče koja se umeće) iznosi ε_3 .

Rešenje:

a) Prema zakonima zračenja sa dela površi 1, površine S (koja se nalazi na temperaturi T_1), se emituje energija snagom q_1 . Osim toga, od nje se reflektuje i deo energije koji usled zračenja dolazi sa površi 2 i ponovo se vraća ka površi 2. Na osnovu toga se za ukupnu snagu kojom se energija prenosi zračenjem sa dela površi 1 može napisati

$$q_{1u} = q_1 + (1 - A_1) q_{2u}. \quad (15.1)$$

Analogno, ukupna snaga kojom se energija prenosi zračenjem sa dela površi 2 iznosi

$$q_{2u} = q_2 + (1 - A_2) q_{1u}. \quad (15.2)$$

q_{iu} , q_i i A_i predstavljaju ukupnu snagu prenosa energije zračenjem, snagu zračenja saglasno Stefan-Boltzman-ovom zakonu i koeficijent apsorpcije površi i ($i = 1, 2$).

Rešavanjem prethodnog sistema dve jednačine sa dve nepoznate (q_{1u} i q_{2u}) se dobija

$$q_{1u} = \frac{q_1 + q_2 - A_1 q_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \quad (15.3)$$

$$q_{2u} = \frac{q_1 + q_2 - A_2 q_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (15.4)$$

Snaga kojom se energija razmenjuje zračenjem između delova posmatranih površi se dobija kao razlika ovih snaga, što se za $T_1 > T_2$ iskazuje jednačinom

$$q = q_{1u} - q_{2u}. \quad (15.5)$$

Zamenom izraza za q_{1u} i q_{2u} se dobija

$$q = \frac{A_2 q_1 - A_1 q_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (15.6)$$

Ako se u izrazu (15.6) izvrše zamene $A_i = \varepsilon_i$ (koeficijent apsorpcije tela je jednak njegovom koeficijentu sivoće) i

$$q_i = C_i \left(\frac{T_i}{100} \right)^4 S = C_c \varepsilon_i \left(\frac{T_i}{100} \right)^4 S \quad (15.7)$$

(Stefan-Boltzman-ov zakon zračenja sivog tela - izrazi (II.3) i (II.4)), dobija se izraz za traženu snagu, koji glasi

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S. \quad (15.8)$$

Iz njega se jednostavno dolazi i do traženog izraza za površinsku gustinu snage kojom se energija zračenjem razmenjuje između ovih površi, deljenjem snage sa površinom S . On glasi

$$q_s = \frac{q}{S} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (15.9)$$

C_c predstavlja konstantu zračenja crnog tela, koja je jednaka Stefan-Boltzman-ovoj konstanti pomnoženoj sa 10^8 ($C_c = \sigma_c \cdot 10^8 = 5,67 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$). C predstavlja konstantu zračenja sivog tela i jednaka je proizvodu konstante zračenja crnog tela i koeficijenta sivoće (ε).

Kao brojni primer, posmatrajmo kako se menja površinska gustina snage (q_s , u kW/m^2), kojom se energija razmenjuje izmedju površi čija je emisivnost $\varepsilon_1 = 0,8$ i površi čija je emisivnost $\varepsilon_2 = 0,4$, a temperatura $T_2 = 293 \text{ K}$ u zavisnosti od temperature T_1 (K). Rezultat izračunavanja se daje skupom parova (T_1, q_s):

$$\{(673; 4,1), (773; 7,2), (873; 11,8), (973; 18,3), (1073; 27,2), (1173; 38,9)\}$$

b) Za razmenu energije izmedju površi 1 i 3, odnosno 3 i 2 (slika 15.1) važi ista relacija koja je izvedena za slučaj razmene energije zračenjem izmedju površi 1 i 2, kada izmedju njih ne postoji zastor. Dakle, može se napisati

$$q_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right) S, \quad (15.10)$$

odnosno

$$q_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left(\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S. \quad (15.11)$$

Pri pisanju jednačina (15.10) i (15.11) je pretpostavljeno stacionarno stanje i zanemaren je toplotni otpor provodjenju toplote kroz ploču 3 (zastor), iz čega sledi da su obe granične površi zastora na istoj temperaturi.

Za dalje rešavanje je pogodno uvesti oznake:

$$C_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \quad (15.12)$$

$$C_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (15.13)$$

U stacionarnom stanju snage razmene energije izmedju površi 1 i zastora, odnosno površi 2 i zastora (q_{13} i q_{32}) su jednake, pa se može napisati jednačina

$$C_{13} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right) = C_{32} \left(\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (15.14)$$

Njenim rešavanjem po temperaturi T_3 se dobija

$$\left(\frac{T_3}{100}\right)^4 = \frac{C_{13} \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + C_{32} \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{C_{13} + C_{32}}. \quad (15.15)$$

Zamenom prethodnog izraza u izraz (15.10), dobija se izraz za snagu razmene energije izmedju površi 1 i 2 kada se izmedju njih nalazi radijacioni ekran. On glasi

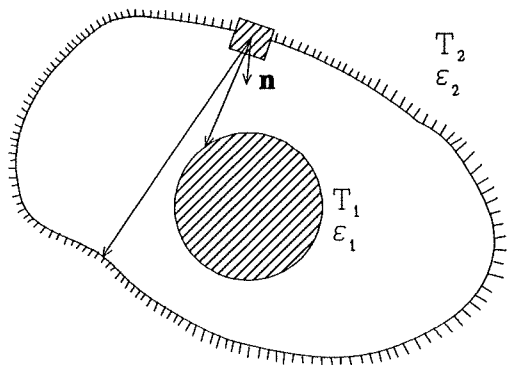
$$q = q_{13} = q_{32} = \frac{C_{13} C_{32}}{C_{13} + C_{32}} \left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S. \quad (15.16)$$

Zamenom vrednosti C_{13} i C_{32} se dobija konačan izraz za snagu razmene energije zračenjem izmedju dve beskonačno velike paralelne površi izmedju kojih je postavljen zastor. On glasi

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2\left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)} \left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S. \quad (15.17)$$

Efekat postavljanja zastora se može najbolje uočiti ako se uporede izrazi (15.8) i (15.17). Postavljanjem zastora se smanjuje snaga razmene energije zračenjem. Za male vrednosti emisivnosti ekrana (ε_3) taj efekat je naročito izražen (za $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ $q \rightarrow 0$). Ova pojava se u praksi veoma često primenjuje u cilju smanjenja razmene energije zračenjem.

Primera radi, površinska gustina snage kojom se energija razmenjuje izmedju dve paralelne velike površi, čije su emisivnosti $\varepsilon_1 = 0,8$ i $\varepsilon_2 = 0,4$, ubacivanjem aluminijumskog zastora (čija je emisivnost $\varepsilon_3 = 0,05$) se smanjuje za 93,4 %. Ovaj rezultat se dobija na osnovu izraza (15.8) i (15.17) i ne zavisi od temperatura T_1 i T_2 .



Slika 16.1

Rešenje:

Osnovna razlika od slučaja koji se ima pri razmeni energije između dve paralelne, beskonačno velike površi (zadatak 15) je u tome što samo deo energije koju emituje površ 2 ($k q_{2u}$) stiže do površi 1, dok ostatak ($(1-k) q_{2u}$) stiže na površ 2.

Kao i u prethodnom zadatku, na osnovu energetske bilansa se može napisati jednačina

$$q_{1u} = q_1 + (1 - A_1) k q_{2u}, \quad (16.1)$$

odnosno

$$q_{2u} = q_2 + (1 - A_2) q_{1u} + (1 - A_2) (1 - k) q_{2u}. \quad (16.2)$$

q_{iu} , q_i i A_i predstavljaju ukupnu snagu, snagu zračenja saglasno *Stefan-Boltzman*-ovom zakonu i koeficijent apsorpcije tela i ($i = 1, 2$). k je koeficijent kojim se iskazuje koliki deo energije koja se emituje sa površi tela 2 stiže do površi tela 1. Njegova vrednost se nalazi u intervalu $[0, 1]$.

Rešavanjem prethodnog sistema jednačina sa dve nepoznate (q_{1u} i q_{2u}) se dobija

$$q_{1u} = \frac{A_2 q_1 + k(1 - A_2) q_1 + (1 - A_1) k q_2}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k} \quad (16.3)$$

16. Izvesti izraz za snagu kojom se energija razmenjuje zračenjem između površi 1 i 2 (gde površ 2 obuhvata površ 1 - slika 16.1) koje se nalaze na temperaturama T_1 i T_2 i čije površi imaju svojstva idealno sivih tela, koeficijenta sivoće ϵ_1 i ϵ_2 , respektivno. Koeficijenti apsorpcije su jednaki koeficijentima sivoće. Površina površi između kojih se razmenjuje energija zračenjem iznose S_1 i S_2 .

$$q_{2u} = \frac{q_2 + (1 - A_2) q_1}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k}. \quad (16.4)$$

Snaga kojom se energija razmenjuje zračenjem između posmatranih površi se dobija kao razlika snage kojom se u nekom trenutku, pri stacionarnom stanju, energija prenosi od površi 1 ka površi 2 i snage kojom se energija, u istom trenutku, prenosi od površi 2 ka površi 1:

$$q = q_{1u} - k q_{2u} \quad (16.5)$$

Zamenom izraza za q_{1u} i q_{2u} iz (16.3) i (16.4) u izraz (16.5) se dobija

$$q = \frac{A_2 q_1 - A_1 k q_2}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k}. \quad (16.6)$$

Na osnovu jednakosti koeficijenta apsorpcije i koeficijenta sivoće ($A = \varepsilon$) i *Stefan-Boltzman*-ovog zakona zračenja sivog tela, izraz (16.6) postaje

$$q = \frac{C_c \varepsilon_1 \varepsilon_2}{A_2 + A_1 k - A_1 A_2 k} \left(S_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - k S_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (16.7)$$

Konačno, potrebno je odrediti vrednost koeficijenta k . On se određuje iz uslova da je snaga razmene energije zračenjem jednaka nuli u slučaju da su jednake temperature površi 1 i 2 ($T_1 = T_2 = T$). Uvodjenjem tog uslova u jednačinu (16.7) se dobija da je $k = S_1/S_2$. Kada se ova vrednost koeficijenta k zameni u izraz (16.7), dobija se konačni izraz za snagu kojom se energija razmenjuje zračenjem između površi površina S_1 i S_2 . On glasi

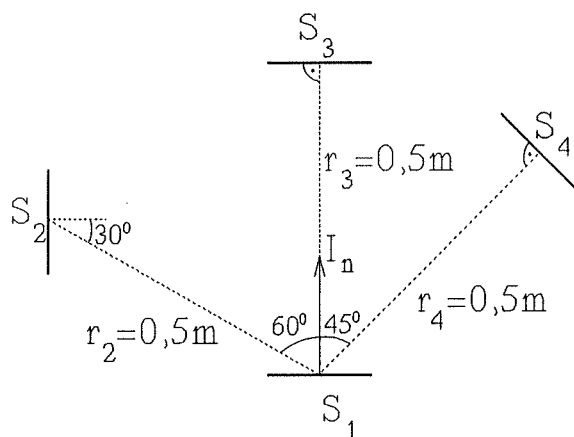
$$q = \frac{C_c S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right). \quad (16.8)$$

Kao brojni primer, posmatrajmo kako se menja snaga (q , u kW), kojom se energija razmenjuje između unutrašnje površi, čija je emisivnost $\varepsilon_1 = 0,4$, temperatura $T_1 = 1073$ K i površina $S_1 = 1$ m² i spoljašnje površi, čija je emisivnost $\varepsilon_2 = 0,8$, a temperatura $T_2 = 293$ K, u zavisnosti od odnosa površina S_1/S_2 . Rezultat izračunavanja se daje skupom parova ($S_1/S_2, q$):

{($\rightarrow 0$; 29,9), (1/8; 29,5), (1/4; 29,2), (1/2; 28,5), (3/4; 27,8), (7/8; 27,5), ($\rightarrow 1$; 27,2)}.

Vidi se da je opseg varijacije snage mali (promena za svega 10 %). To je rezultat malog koeficijenta sivoće tela 1 (ε_1) u odnosu na koeficijent sivoće tela 2 (ε_2).

17. Mala površ površine $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$ zrači difuzno. Izmerena vrednost jačine zračenja u pravcu normale, po jedinici površine površi koja zrači iznosi $I_{n,s} = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$. Zračenju ove male površi su izložene tri površi površina $S_2 = S_3 = S_4 = 10^{-3} \text{ m}^2$, koje su udaljene $0,5 \text{ m}$ od površi S_1 (koristiće se ista oznaka za površ i vrednost njene površine).



Slika 17.1

Rešenje:

a) Kod difuznog izvora zračenja, vrednost jačine zračenja sa njegove elementarne površi, podeljena sa površinom elementarne površi projektovanom na pravac zračenja, je ista u svim pravcima, što se iskazuje jednačinom

$$\frac{I_n}{dS} = \frac{I_\varphi}{dS \cos \varphi}. \quad (17.1)$$

Iz ovog uslova se dobija veza izmedju jačine zračenja u proizvoljnom pravcu, definisanom uglom φ (u odnosu na normalu) i jačine zračenja u pravcu normale, koja glasi

$$I_\varphi = I_n \cos \varphi. \quad (17.2)$$

Dakle, raspodela jačine zračenja kod difuznog izvora se vrši po *Lambert*-ovom kosinusnom zakonu (II.5). Primenom izraza (17.2) se dobijaju tražene vrednosti $I_{2,s} = 3500 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$, $I_{3,s} = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$ i $I_{4,s} = 4950 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ srad})$.

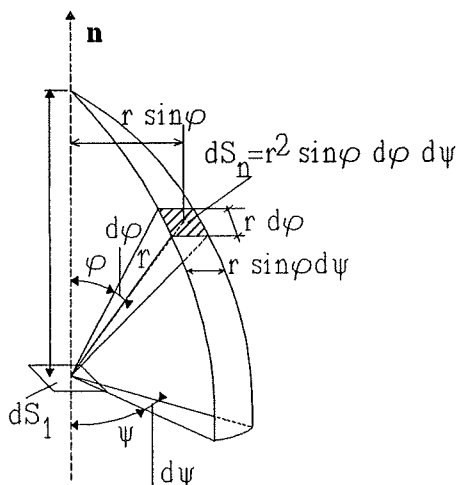
b) Elementarni prostorni ugao $d\omega$ je definisan kao prostor ograničen zracima, povučenim iz centra sfere, kojima se vidi elementarni deo sfere. On je određen odnosom površine elementa sfere dS_n i kvadratom poluprečnika sfere: $d\omega = dS_n / r^2$.

a) Kolika je jačina zračenja po jedinici površine S_1 u svakom od tri pravca, definisanim "tačkastim" površima S_2 , S_3 i S_4 ? Položaj i orijentacija površi S_1 , S_2 i S_3 su prikazani na slici 17.1.

b) Pod kojim se prostornim uglovima iz "tačkaste" površi S_1 vide površi S_2 , S_3 i S_4 ?

v) Kolika je snaga zračenja koja se sa površi S_1 emituje do površi S_2 , S_3 i S_4 ?

Maloj površi proizvoljnog oblika i orijentacije odgovara prostorni ugao, pod kojim se ona vidi iz definisane tačke, koji je jednak odnosu površine njene projekcije na ravan upravnu na pravac određen definisanom tačkom i malom površi koja se posmatra i kvadrata rastojanja. Elementarni prostorni ugao koji odgovara pravcu definisanom uglovima φ i ψ u sfernom koordinatnom sistemu se određuje na način prikazan na slici 17.2.



$$d\omega = \frac{dS_n}{r^2} = \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$

Slika 17.2

Sve četiri površi sa slike 17.1 se mogu smatrati diferencijalnim ("tačkastim"), jer su $S_j/r_j^2 \ll 1$. Dakle, $d\omega = dS_n / r^2$, gde je $dS_{n,j} = dS_j \cos \varphi_j$, a φ_j ugao između pravca normale i pravca upadnog zračenja. Traženi prostorni uglovi imaju vrednosti:

$$\omega_{1-2} = \frac{10^{-3} \cos 30^\circ}{0,5^2} = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (17.3)$$

$$\omega_{1-3} = \frac{10^{-3} \cos 0^\circ}{0,5^2} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (17.4)$$

$$\omega_{1-4} = \frac{10^{-3} \cos 30^\circ}{0,5^2} = 4,00 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (17.5)$$

v) S obzirom da su sve površi diferencijalne ("tačkaste", "elementarne"), snaga zračenja koja se sa površi S_1 emituje do površi S_2 , S_3 i S_4 se određuje kao proizvod prostornog ugla pod kojim se vidi površ S_i ($i = 2, 3, 4$) i intenziteta u tom pravcu, odnosno prema izrazu

$$q_{1-i} = I_{\varphi_{1,i}} \omega_{1-i}, \quad (17.6)$$

gde je

$$I_{\varphi_{1,i}} = I_n \cos \varphi_{1,i} = I_{n,S} S_1 \cos \varphi_{1,i}. \quad (17.7)$$

U izrazu (17.7), $\varphi_{1,i}$ predstavlja ugao između pravca i normale na površ S_1 .

Primenom izraza (17.7), dobijaju se snage zračenja sa površi S_1 do površi S_2 , S_3 i S_4 :
 $q_{1-2} = 12,1 \text{ mW}$, $q_{1-3} = 28 \text{ mW}$ i $q_{1-4} = 19,8 \text{ mW}$.

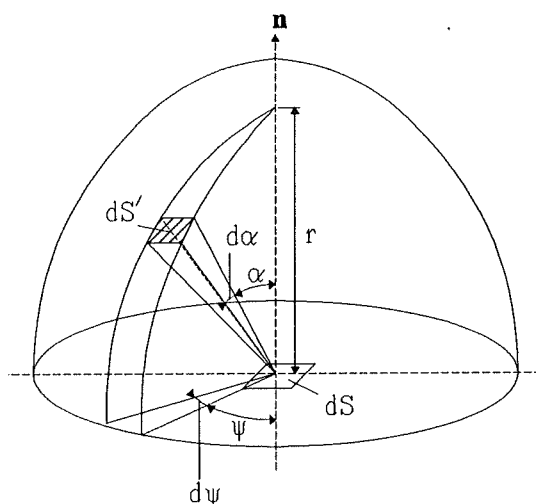
Zadržimo se na pojmovima tačkastog izvora zračenja i tačkastog prijemnika zračenja. Izvor zračenja se može posmatrati kao tačkasti ako se sa njegove svake elementarne površi tačka u kojoj se posmatra zračenje tela vidi pod istim uglom u odnosu na normalu. U tom slučaju su jačine zračenja sa svih elementarnih delova iste (bez obzira na njihovu prostornu raspodelu sa elementarnog dela površi); prostorna raspodela zračenja površi tela je zbirni rezultat zračenja sa njenih elementarnih delova. Raspodela zračenja sa elementarnih delova, kao karakteristika površi koja zrači, ima identičan oblik za sve elementarne površi. Izvor se tada može svesti na tačku, u odnosu na koju se mogu definisati i prostorni uglovi. Površ koja je prijemnik zračenja se može smatrati tačkastom površi ako se svi njeni delovi vide pod istim uglom sa svake od tačaka na površi izvora zračenja. Tada se mogu definisati prostorni uglovi pod kojima se sa svake elementarne površi izvora (sa svake tačke površi izvora) vidi prijemnik zračenja.

18. Ako je temperatura površi crnog tela jednaka T , kolika će biti jačina zračenja sa njegovog elementarnog dela po jedinici površine tog dela u smeru normale? Jačina zračenja sa elementarnog dela se menja po *Lambert*-ovom zakonu.

Rešenje:

Snaga kojom se sa jedinične površine elementarne površi dS energija zrači kroz elementarni prostorni ugao $d\omega$, pod kojim se vidi elementarna površ dS' na površi polusfere (kao što je pokazano na slici 18.1), iznosi

$$dq_s = I_{l,s} d\omega. \quad (18.1)$$



Slika 18.1

Prostorni ugao $d\omega$ pod kojim se sa elementarne površi dS (iz tačke) vidi elementarna površ dS' je određen izrazom $d\omega = \sin \alpha d\psi d\alpha$, što je objašnjeno u prethodnom zadatku. Uglovi α i ψ su uglovi u sfernom koordinatnom sistemu, čiji je koordinatni početak postavljen u "tačkastu" površ dS .

Veza površinske gustine snage koja se zrači u poluprostor sa površi dS i jačine zračenja sa elementarnog dela po jedinici njegove površine u smeru normale, dobija se integracijom svih elementarnih snaga zračenja drugog reda koje se zrače u elementarne prostorne uglove $d\omega$ pod kojima se vide elementarne površi polusfere, kojima odgovaraju granice $\psi_1 = 0$ do $\psi_2 = 2\pi$ i $\alpha_1 = 0$ do $\alpha_2 = \pi/2$:

$$q_s = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} I_{l,s} \sin \alpha d\psi d\alpha \quad (18.2)$$

$$q_s = \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} I_{n,s} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha \quad (18.3)$$

$$q_s = 2\pi \frac{1}{2} I_{n,s} \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos \pi) = \pi I_{n,s} \quad (18.4)$$

Sa površi crnog tela temperature T energija se zračenjem, prema *Stefan-Boltzmanovom* zakonu (II.4), odvodi površinskom gustinom snage

$$q_s = C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (18.5)$$

Iz prethodne dve jednačine se dobija jačina zračenja sa elementarne površi crnog tela (temperature T) po jedinici površine elementarnog dela u smeru normale:

$$I_{n,s} = \frac{1}{\pi} q_s = \frac{1}{\pi} C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (18.6)$$

19. Profesionalno izradjeni elektrootporni izvor toplotnog zračenja se nalazi na visini $h = 5$ m od jedne horizontalne ravni. Merenjem površinske gustine snage zračenja q_s duž prave u toj ravni, koja se dobija kao presek te ravni i vertikalne ravni koja prolazi kroz izvor, dobijeni su rezultati prikazani u tablici 19.1. x predstavlja rastojanje od tačke u koju se projektuje izvor zračenja na pravu do tačke u kojoj se vrši merenje (slika 19.1).

Tablica 19.1

x (m)	-10	-5	-2,5	0	2,5	5	10
q_s (W/m ²)	4/25	1	64/25	4	64/25	1	4/25

Za velika rastojanja x (na obe strane) izmerena gustina snage zračenja je približno jednaka nuli.

Kako izgleda kriva raspodele jačine zračenja u postavljenoj vertikalnoj ravni, iskazana u polarnom koordinarnom sistemu (koordinate J_φ, φ), čiji je koordinatni početak u tački na koju je sveden izvor?

Rešenje:

Da bi se odredila raspodela jačine zračenja u postavljenoj vertikalnoj ravni koja sadrži izvor ($\psi = \psi_0$), potrebno je uspostaviti vezu između površinske gustine snage zračenja, koja se meri u tački na pravoj, i jačine zračenja u pravcu definisanom tačkastim izvorom zračenja i tačkom u kojoj se meri gustina.

Na slici 19.1 su prikazani izvor zračenja (I), rastojanje izvora od horizontalne ravni (h) i rastojanje izvora od tačke (A) u kojoj se meri površinska gustina snage zračenja (y).

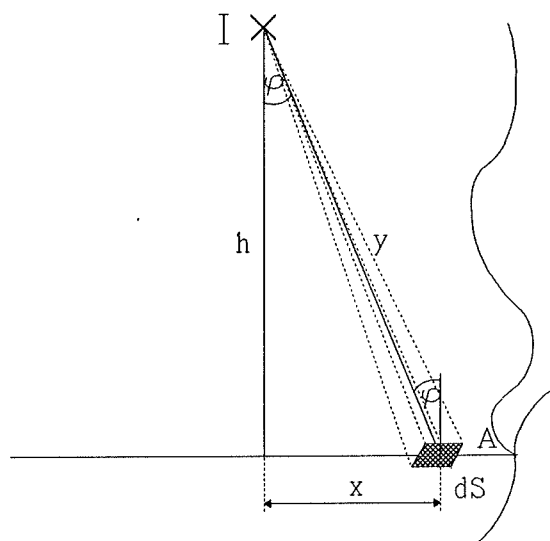
Sa slike 19.1 se vidi da je

$$y = \frac{h}{\cos \varphi}, \quad (19.1)$$

a prostorni ugao pod kojim se vidi elementarna površ dS , oko tačke A, iz tačke izvora zračenja

$$d\omega = \frac{dS_n}{y^2} = \frac{dS \cos \varphi}{y^2}, \quad (19.2)$$

gde dS_n predstavlja površinu projekcije površi dS na pravac potega y .



Slika 19.1

Jačina zračenja se definiše izrazom

$$J = \frac{dq}{d\omega}. \quad (19.3)$$

Posle zamene izraza za prostorni ugao, dobija se

$$J = \frac{dq}{dS \cos \varphi} y^2, \quad (19.4)$$

odnosno

$$J = \frac{dq}{dS \cos^3 \varphi} h^2. \quad (19.5)$$

Član dq/dS u prethodnom izrazu predstavlja površinsku gustinu snage u tački A, odnosno upravo veličinu q_s , za koju su dati podaci u tablici 19.1. Dakle, može se napisati

$$J = \frac{h^2}{\cos^3 \varphi} \frac{dq}{dS} = \frac{h^2}{\cos^3 \varphi} q_s. \quad (19.6)$$

Prema izvedenom izrazu (19.6) izračunavaju se jačine zračenja u pravcima definisanim visinom h i pomerajima x , gde su vršena merenja gustine snage zračenja. Rezultati su prikazani u tablici 19.2. Za svako od rastojanja je izračunat ugao φ pomoću izraza

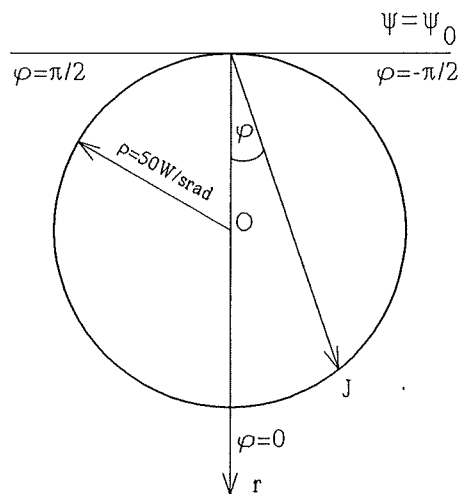
$$\varphi = \arctg \frac{x}{h} \quad (19.7)$$

i odgovarajuća jačina zračenja.

Tablica 19.2

x (m)	10	5	2,5	0
φ	63,4	45	26,6	0
J (W/srad)	44,7	70,7	89,5	100

S obzirom na simetriju rezultata za pozitivne i negativne uglove, koja se uočava u tablici 19.1, vrednosti jačine zračenja su prikazane samo za pozitivne uglove. Kada se dobijene vrednosti unesu u polarni koordinatni sistem (za fiksiranu koordinatu $\psi = \psi_0$), vidi se da one leže na krugu poluprečnika 50 W/srad, sa centrom u tački ($\varphi = 0, \rho = 50$ W/srad). Ovaj krug je prikazan na slici 19.2.



Slika 19.2

20. Jedan izvor zračenja ima u sfernom koordinatnom sistemu, čiji je centar postavljen u centar izvora, raspodelu jačine zračenja u obliku sfere, prečnika $J_0 = 140 \text{ W/srad}$ i koordinate centra $r_0 = 70 \text{ W/srad}$ i $\varphi_0 = 0^\circ$.

Pomoću takvih izvora, postavljenih u čvorove mreže okaca $a \times a$, zagreva se ravan koja se nalazi na rastojanju $h = 1 \text{ m}$ od mreže.

Koliko iznosi minimalno rastoranje a pri kome površinska gustina snage zračenja u ravni koja se zagreva nigde ne prelazi vrednost $q_s^* = 0,05 \text{ W/cm}^2$? Pri proračunu uzeti pet najbližih izvora toplote. Analizom funkcije raspodele površinske gustine snage zračenja je ustanovljeno da površinska gustina snage ima najveće vrednosti u tačkama koje se nalaze neposredno ispod izvora.

Kolika se greška čini pri izračunavanju najveće vrednosti površinske gustine snage zračenja u ravni koja se zagreva, uzimajući u obzir samo pet najbližih izvora, u odnosu na slučaj kada bi se uzeli u obzir svi oni izvori koji u gustini snage učestvuju sa najmanje 1 % od vrednosti koju stvara izvor koji se nalazi neposredno iznad tačke? Ovu grešku odrediti za mrežu čije je okce 1 m.

Rešenje:

S obzirom da jačina zračenja ima sfernu prostornu raspodelu, njena vrednost u pravcu koji sa normalom na zagrevanu ravan obrazuje ugao γ je određena *Lambert*-ovim zakonom, odnosno izrazom

$$J_\gamma = J_0 \cos \gamma. \quad (20.1)$$

Gustina snage zračenja u tački A, koja sa izvorom definiše pravac koji odgovara uglu γ je data izrazom (19.6), odnosno

$$q_s = \frac{J_\gamma}{h^2} \cos^3 \gamma. \quad (20.2)$$

Smenom izraza za jačinu zračenja (20.1) u izraz (20.2) i vrednosti kosinusa ugla iskazanog preko koordinata x i y (koordinate tačke A u zagrevanoj ravni, sa koordinatnim početkom u tački u koju se projektuje izvor), dobija se

$$q_s = J_0 \frac{h^2}{(h^2 + x^2 + y^2)^2}. \quad (20.3)$$

$x^2 + y^2 = d^2$ predstavlja kvadrat rastojanja tačke A od tačke projekcije izvora na zagrevanu ravan.

Prema izrazu (20.3), gustina snage zračenja u tački ispod izvora, za koju se uzima u obzir uticaj 5 najbližih izvora (izvori označeni sa 1 i 2 na slici 20.1), je određena izrazom

$$q_s = \frac{J_0}{h^2} + 4J_0 \frac{h^2}{(h^2 + a^2)^2}. \quad (20.4)$$

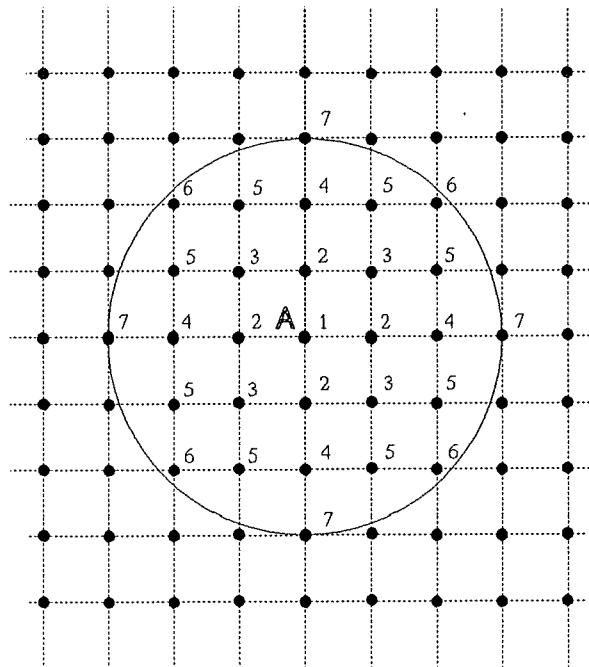
Iz uslova da je gustina snage q_s manja od vrednosti q_s^* se dolazi do nejednakosti

$$\frac{J_0}{h^2} \left(1 + \frac{4}{\left(1 + \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right)^2} \right) \leq q_s^*. \quad (20.5)$$

Iz nje se određuje minimalna veličina stranice okca:

$$a_{min} = h \sqrt{\sqrt{\frac{2}{q_s^* \frac{h^2}{J_0} - 1}} - 1} \quad (20.6)$$

Izračunavanjem se dobija minimalna veličina stranice okca od $a_{min} = 0,5$ m.



Slika 20.1

Odnos površinskih gustina snaga zračenja u tački ispod nekog izvora koje potiču od izvora na horizontalnom rastojanju d i od izvora iznad tačke, prema (20.3) iznosi

$$\frac{q_{sd}}{q_{s0}} = \left(\frac{h^2}{h^2 + d^2} \right)^2. \quad (20.7)$$

Rešavanjem, po rastojanju d , nejednačine

$$\frac{q_{sd}}{q_{s0}} \geq 0,01, \quad (20.8)$$

dobija se da izvori koje su na horizontalnom rastojanju manjem ili jednakom od $d^* = 3h$ utiču na vrednost površinske gustine snage zračenja sa najmanje 1 % vrednosti koju stvara izvor koji se nalazi neposredno iznad tačke. Ovaj uslov, s obzirom da je visina jednaka dimenziji okca, znači da treba uzeti u obzir izvore označene sa 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7 na slici 20.1. Uzimanjem u obzir ovih izvora, površinska gustina snage se izračunava prema izrazu

$$q_s = J_0 h^2 \left[\frac{1}{h^4} + \frac{4}{(h^2 + a^2)^2} + \frac{4}{(h^2 + (a\sqrt{2})^2)^2} + \frac{4}{(h^2 + (2a)^2)^2} + \right. \\ \left. \frac{8}{(h^2 + (a\sqrt{5})^2)^2} + \frac{4}{(h^2 + (a\sqrt{8})^2)^2} + \frac{4}{(h^2 + (3a)^2)^2} \right]. \quad (20.9)$$

Izračunata, za $a = h = 1$ m, ona iznosi $q_s = 408$ W/m².

Ako bi se u obzir uzelo samo pet najbližih izvora, površinska gustina snage bi se odredila iz izraza

$$q_{sp} = J_0 h^2 \left[\frac{1}{h^4} + \frac{4}{(h^2 + (a\sqrt{2})^2)^2} \right]. \quad (20.10)$$

Ovako približno izračunata gustina snage iznosi $q_{sp} = 280$ W/m².

Dakle, tražena greška (uzimanje u obzir 5 u odnosu na 29 izvora) iznosi

$$\frac{q_{sp} - q_s}{q_s} = \frac{280 - 408}{408} = -31,4\%. \quad (20.11)$$

21. Posmatrajmo veliki izotermički zatvoreni prostor koji se održava na konstantnoj temperaturi od 2000 K.

- a) Izračunati površinsku gustinu snage kojom se energija emituje kroz mali otvor u okolinu.
- b) Kolika je talasna dužina λ_1 ispod koje se zrači 10 % ukupne snage zračenja.
- v) Kolika je talasna dužina λ_2 preko koje se zrači 10 % ukupne snage zračenja.
- g) Odrediti maksimalnu spektralnu površinsku gustinu snage i talasnu dužinu pri kojoj ona nastaje.

Rešenje:

Zatvoren prostor velike granične izotermičke površi, na kome postoji mali otvor, prema svojim osobinama predstavlja crno telo. To važi bez obzira na refleksiona svojstva površi: svako zračenje koje se emituje do površi malog otvora biće apsorbavano posle dovoljnog broja refleksija. Refleksiona, odnosno apsorpciona svojstva površi utiču samo na broj refleksija. Pri tome se smatra da zračenje od svih refleksija dolazi ponovo do površi; zanemaruje se deo zračenja koji bi dolazio do površi malog otvora i odvodio se u okolinu. Osim toga, energija koja potiče sa površi je zbirni rezultat refleksije i zračenja sa nje. Umanjenje snage kojom se energija zrači sa površi prema *Stefan-Boltzman*-ovom zakonu, u odnosu na vrednost koja bi se imala za površ sa idealnim emisionim i apsorpcionim svojstvima na istoj temperaturi je jednako snazi kojom se upadna energija reflektuje (kod površi sa idealnim emisionim i apsorpcionim svojstvima, ona je jednaka nuli).

- a) Zračenje kroz mali otvor zatvorene površi ima karakteristike zračenja crnog tela. Površinska gustina snage se određuje prema *Stefan-Boltzmann*-ovom zakonu (II.4) i iznosi

$$q_s = 5,67 \left(\frac{2000}{100} \right)^4 = 9,07 \cdot 10^5 \frac{W}{m^2}. \quad (21.1)$$

- b) Iz tablice 1, čiji su egzistencija i smisao opisani u uvodnom delu poglavlja i u kojoj su date zavisnosti $F_{(0-\lambda^*)} = f(\lambda^* T)$ za vrednost faktora $F = 0,1$ se očitava $\lambda^* T \approx 2200 \mu\text{m K}$. Prema ovoj vrednosti i temperaturi od $T = 2000 \text{ K}$ dobija se tražena talasna dužina $\lambda_1 = 1,1 \mu\text{m}$.

- v) Jednostavnom analizom, što se prepušta čitaocu, se dolazi do izraza za vezu između odnosa energije koja se emituje u opsegu talasnih dužina $[\lambda_1, \lambda_2]$ i ukupne površinske gustine $F_{(\lambda_1 - \lambda_2)}$ i tabličnih vrednosti $F_{(0-\lambda^*)}$:

$$F_{(\lambda_1 - \lambda_2)} = F_{(0-\lambda_2)} - F_{(0-\lambda_1)} \quad (21.2)$$

Postavljeni uslov zadatka se može iskazati preko faktora F kao $F_{(\lambda_2 - \infty)} = 0,1$. Iz ove vrednosti se može odrediti faktor $F_{(0 - \lambda_2)}$, preko koga se na isti način kao u prethodnom delu zadatka može doći do tražene talasne dužine λ_2 :

$$F_{(\lambda_2 - \infty)} = F_{(0 - \infty)} - F_{(0 - \lambda_2)} = 1 - F_{0 - \lambda_2} \quad (21.3)$$

$$F_{(0 - \lambda_2)} = 1 - 0,1 = 0,9 \quad (21.4)$$

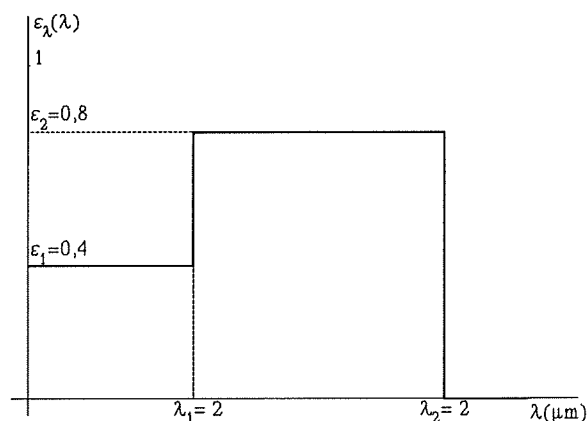
Iz tablice 1 se za vrednost faktora $F = 0,9$ očitava $\lambda^* T \approx 9328 \mu\text{m K}$, odakle se dobija $\lambda_2 = 4,69 \mu\text{m}$.

g) Prema *Wien*-ovom zakonu (II.2) se dobija talasna dužina pri kojoj se dostiže maksimalna spektralna površinska gustina snage $\lambda_{max} = 1,45 \mu\text{m}$. Prema *Planck*-ovom zakonu zračenja (II.1) se određuje maksimalna spektralna površinska gustina snage:

$${}^c q_{S\lambda_{max}} = \frac{0,369 \cdot 10^{-15} (1,45 \cdot 10^{-6})^{-5}}{\frac{1,44 \cdot 10^{-2}}{e^{1,45 \cdot 10^{-6} \cdot 2000} - 1}} \quad (21.5)$$

$${}^c q_{S\lambda_{max}} = 4,04 \cdot 10^{11} \frac{W}{m^2} = 4,04 \cdot 10^5 \frac{W}{\mu m^2} \quad (21.6)$$

22. Spektralna emisivnost površi, definisana kao odnos snage kojom se energija sa površi tela odvodi zračenjem u opsegu talasnih dužina $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ prema takvoj snazi kojom se energija odvodi sa površi crnog tela iste temperature, može da zavisi od talasne dužine λ . Za jednu površ, njena promena (zavisnost od talasne dužine) je prikazana na slici 22.1. Temperatura površi je 1600 K.



Slika 22.1

- a) Odrediti ukupnu emisivnost (koeficijent sivoće) i ukupnu snagu prenosa energije zračenjem.
- b) Pri kojoj talasnoj dužini će monohromatska površinska gustina snage dostići svoju maksimalnu snagu?

Rešenje:

a) Ukupna emisivnost, odnosno koeficijent sivoće, definisana je kao odnos ukupne površinske gustine snage zračenja površi i ukupne površinske gustine snage zračenja crnog tela iste temperature:

$${}^e q_s = \varepsilon {}^c q_s \quad (22.1)$$

$${}^e q_s = \varepsilon C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (22.2)$$

Ova veličina je najčešće dovoljna za opisivanje emisivnih svojstava površi u praktičnim inženjerskim proračunima. On se za takve namene obično daje kao konstantna vrednost. Njena vrednost se određuje prema izrazu

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} {}^e q_{s,\lambda} d\lambda}{C_c \left(\frac{T}{100} \right)^4} \quad (22.3)$$

Uvodjenjem spektralne emisivnosti, prethodni izraz postaje

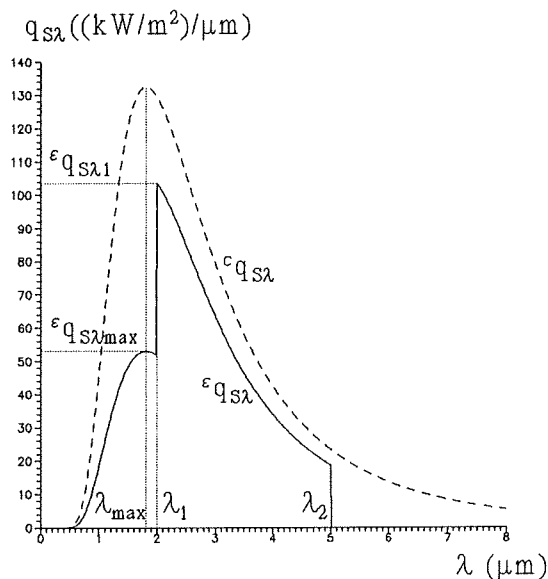
$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda) c_{s\lambda} d\lambda}{C_c \left(\frac{T}{100}\right)^4} \quad (22.4)$$

U konkretnom slučaju, može se napisati

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \int_0^{\lambda_1} c_{s\lambda} d\lambda + \varepsilon_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} c_{s\lambda} d\lambda}{C_c \left(\frac{T}{100}\right)^4} = \varepsilon_1 F_{0-\lambda_1} + \varepsilon_2 (F_{0-\lambda_2} - F_{0-\lambda_1}) \quad (22.5)$$

Za $\lambda_1 T = 3200 \mu\text{m K}$, $F_{0-\lambda_1} = 0,318$, a za $\lambda_2 T = 8000 \mu\text{m K}$, $F_{0-\lambda_2} = 0,856$ (tablica 1), prema čemu se dobija vrednost ukupnog koeficijenta sivoće $\varepsilon = 0,558$.

b) Na slici 22.2 prikazane su spektralne raspodele zračenja crnog tela i posmatrane površi temperature 1600 K. Očigledno je da se maksimum monohromatske površinske gustine snage dostiže pri talasnoj dužini pri kojoj se ima i maksimum monohromatske snage crnog tela (λ_{max}) ili pri talasnoj dužini pri kojoj dolazi do porasta spektralne emisivnosti (λ_1). Talasna dužina pri kojoj se ima maksimum monohromatske snage zračenja crnog tela se određuje prema Wien-ovom (II.2) zakonu:



Slika 22.2

$$\lambda_{max} = \frac{2896}{1600} = 1,81 \mu\text{m} \quad (22.6)$$

Vrednosti površinskih monohromatskih snaga zračenja se određuju prema izrazima

$$\varepsilon q_{s\lambda_{max}} = \varepsilon_1 \frac{C_1 \lambda_{max}^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda_{max} T}} - 1} \quad (22.7)$$

i

$${}^{\varepsilon}q_{s\lambda_1} = \varepsilon_2 \frac{C_1 \lambda_1^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda_1 T}} - 1} \quad (22.8)$$

Izračunate, njihove vrednosti iznose

$${}^{\varepsilon}q_{s\lambda_{max}} = 0,4 \frac{0,369 \cdot 10^{-15} (1,81 \cdot 10^{-6})^{-5}}{\frac{1,44 \cdot 10^{-2}}{e^{1,81 \cdot 10^{-6} 1600} - 1}} = 53 \frac{\frac{kW}{m^2}}{\mu m} \quad (22.9)$$

i

$${}^{\varepsilon}q_{s\lambda_1} = 0,8 \frac{0,369 \cdot 10^{-15} (2 \cdot 10^{-6})^{-5}}{\frac{1,44 \cdot 10^{-2}}{e^{2 \cdot 10^{-6} 1600} - 1}} = 103,6 \frac{\frac{kW}{m^2}}{\mu m} \quad (22.10)$$

Dakle, maksimum monohromatske površinske gustine snage zračenja se dostiže pri talasnoj dužini pri kojoj dolazi do povećanja emisivnosti ($\lambda = \lambda_1 = 5 \mu m$) i iznosi $103,6 (kW/m^2)/\mu m$.

U zadatku je obradjen slučaj zračenja tela koje nije idealno sivo, odnosno kod koga koeficijent sivoće zavisi od talasne dužine. Preko promenljivog koeficijenta sivoće, izraženog u funkciji ugla, može se uzeti u obzir i odstupanje raspodele zračenja od difuzne raspodele ($I_{\gamma} = I_0 \cos \gamma$). U opštem slučaju, koeficijent sivoće zavisi od obe ugaone koordinate u sfernom koordinatnom sistemu $\varepsilon = f(\psi, \varphi)$, ali najčešće zavisi samo od otklona prema normali - $\varepsilon = \text{const.}(\psi, \varphi_0)$.

Pored navedenih veličina, koeficijent sivoće može zavisiti i od temperature, odnosno opšta funkcionalna zavisnost koeficijenta sivoće ima oblik $\varepsilon = F(\lambda, \psi, \varphi, T)$.

Slično važi i za koeficijent apsorpcije, koji karakteriše apsorpciju energije zračenja koje se emituje do površi tela.

23. Metalna sfera malih dimenzija, početne temperature $T_s = 300$ K, unosi se u veliku peć temperature zidova $T_z = 1200$ K, čije se zračenje može posmatrati kao zračenje crnog tela. Energija koja se zračenjem prenosi do površi sfere se delom reflektuje, a delom apsorbuje. Transmisija u ovom slučaju ne postoji. Odrediti ukupni koeficijent apsorpcije i ukupni koeficijent sivoće:

a) u početnom trenutku i

b) u stacionarnom stanju.

Spektralni koeficijent apsorpcije, za $\lambda^* \leq 5 \mu\text{m}$ iznosi $A_{\lambda 1} = 0,8$, a za $\lambda^* > 5 \mu\text{m}$ $A_{\lambda 2} = 0,1$. Spektralni koeficijent apsorpcije je jednak spektralnom koeficijentu sivoće. Oni ne zavise od temperature površi metalne sfere.

v) Napisati diferencijalnu jednačinu vremenske promene temperature izotermičke sfere od vremena. Površina omotača izotermičke sfere iznosi S_s , masa M i specifični maseni toplotni kapaciteti c_p .

Rešenje:

Promenljivi koeficijent apsorpcije se tretira na sličan način kao promenljivi koeficijent sivoće. Ukupni koeficijent apsorpcije se definiše kao odnos ukupne apsorbovane energije i energije koju bi apsorbovalo idealno crno telo pri istom upadnom talasu zračenja:

$$A = \frac{\int_0^{\infty} A_{\lambda} q_{s\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} q_{s\lambda} d\lambda} \quad (23.1)$$

$q_{s\lambda}$ predstavlja površinsku monohromatsku gustinu snage zračenja koja se emituje do površi tela. U konkretnom slučaju iz zadatka, njena raspodela se poklapa sa raspodelom zračenja kod crnog tela. U slučaju da je izvor zračenja koje se emituje do površi tela crno telo, mogu se koristiti tablične vrednosti faktora zračenja u opsegu talasnih dužina, objašnjene u uvodnom delu ovog poglavlja. To se jasno vidi iz razvijenog izraza (23.1), u kome je upadno zračenje jednako zračenju crnog tela:

$$A = A_{\lambda 1} \frac{\int_0^{\lambda^*} q_{s\lambda} d\lambda}{\sigma_c T_z^4} + A_{\lambda 2} \frac{\int_{\lambda^*}^{\infty} q_{s\lambda} d\lambda}{\sigma_c T_z^4} \quad (23.2)$$

Dakle, u slučaju dvostepene promene koeficijenta apsorpcije i crnog tela temperature T_z , kao izvora zračenja, koeficijent apsorpcije se određuje prema izrazu

$$A = A_{\lambda 1} F_{(0-\lambda^*)} + A_{\lambda 2} (1 - F_{(0-\lambda^*)}). \quad (23.3)$$

Iz tablice 1, za $\lambda^* T_z = 5 \mu\text{m} \cdot 1200 \text{ K} = 6000 \mu\text{m K}$ se očitava vrednost $F_{(0-\lambda^*)} = 0,738$, pa se za koeficijent apsorpcije dobija

$$A = 0,8 \cdot 0,738 + 0,1 (1 - 0,738) = 0,62. \quad (23.4)$$

Koeficijent apsorpcije se u vremenu ne menja, jer je konstantna temperatura zidova peći, pa samim tim i spektralni sastav zračenja koje stiže do površi sfere. U slučaju da na apsorpciona svojstva utiče i temperatura površi, ovaj zaključak ne bi važio, jer se temperatura sfere u toku vremena povećava, od početnih 300 K, do temperature u stacionarnom stanju (1200 K).

Koeficijent sivoće se određuje prema izrazu (22.3), odnosno

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} {}^c q_{s\lambda} d\lambda}{\sigma_c T_s^4}, \quad (23.5)$$

gde je ${}^c q_{s\lambda}$ površinska monohromatska gustina snage zračenja crnog tela koje se nalazi na temperaturi jednakoj temperaturi tela čiji se koeficijent sivoće izračunava (T_s). S obzirom na zadatu jednakost spektralnih koeficijenata apsorpcije i sivoće, dolazi se do izraza

$$\varepsilon = A_{\lambda 1} \frac{\int_0^{\lambda^*} {}^c q_{s\lambda} d\lambda}{\sigma_c T_s^4} + A_{\lambda 2} \frac{\int_{\lambda^*}^{\infty} {}^c q_{s\lambda} d\lambda}{\sigma_c T_s^4}, \quad (23.6)$$

odnosno

$$\varepsilon = A_{\lambda 1} F_{(0-\lambda^*)} + A_{\lambda 2} (1 - F_{(0-\lambda^*)}). \quad (23.7)$$

a) Iz tablice 1, za $\lambda^* T_s = 5 \mu\text{m} \cdot 300 \text{ K} = 1500 \mu\text{m K}$ se očitava vrednost $F_{(0 - \lambda^*)} = 0,014$, pa se za koeficijent sivoće dobija

$$\varepsilon = 0,8 \cdot 0,014 + 0,1 (1 - 0,014) = 0,11. \quad (23.8)$$

Zbog promene temperature, vrednost koeficijenta sivoće se menja u toku vremena (preko $\lambda^* T_s$ i faktora $F_{(0 - \lambda^*)}$).

b) Stacionarno stanje se uspostavlja kada se temperatura sfere izjednači sa temperaturom peći ($T_s = T_z = 1200 \text{ K}$). Koeficijent sivoće se određuje prema izrazu (23.7), gde je $\lambda^* T_s = 5 \mu\text{m} \cdot 1200 \text{ K} = 6000 \mu\text{m K}$ i $F_{(0 - \lambda^*)} = 0,738$ (tablica 1). Dobija se da je koeficijent sivoće u stacionarnom stanju jednak konstantnoj vrednosti koeficijenta apsorpcije (0,62).

v) Do tražene diferencijalne jednačine se dolazi postavljanjem energetskog bilansa, da je snaga akumulacije energije u materijalu ograničenom sferom jednaka razlici snaga kojima se energija zračenjem predaje od peći ka telu i zračenjem odvodi sa njega ka peći:

$$q_{ak} = q_{ul} - q_{izl} \quad (23.9)$$

Snaga kojom se energija zračenjem predaje telu se dobija množenjem koeficijenta apsorpcije i snage zračenja crnog tela, izračunatog kao da se vrši kroz otvor površine S_s . Snaga kojom se energija zračenjem odvodi sa površi sfere se određuje kao proizvod emisivnosti, koja zavisi od temperature i zračenja fiktivnog crnog tela koje se nalazi na temperaturi sfere. Može se smatrati da je temperatura sfere konstantna po zapremini i da se može zanemariti konvektivni prenos toplote. Na osnovu toga se može napisati tražena diferencijalna jednačina:

$$A (\sigma_c T_z^4) S_s - \varepsilon \sigma_c T_s^4 S_s = M c_p \frac{dT_s}{dt} \quad (23.10)$$

Pri rešavanju diferencijalne jednačine (23.10) i određivanju vremenske promene temperature metalne sfere, mora se uvažiti i promenljivost koeficijenta sivoće sa temperaturom sfere.

24. Posmatrajmo disk prečnika D (površine S_j) i ravnu površ površine S_i koja je mnogo manja od površine diska (S_j). Disk i ravna površ su paralelni. Ravna površ male površine se nalazi na rastojanju L od centra površi diska, locirana oko normale koja prolazi kroz centar diska. Odrediti "faktor vidjenja" površi S_j sa površi S_i ($F_{i \rightarrow j}$).

Rešenje:

S obzirom da se površ površine S_i može smatrati "tačkastim" izvorom zračenja (značenje ovog pojma je objašnjeno u zadatku 17 - uglovi γ_i , γ_j i rastojanje R sa slike 1 su približno konstantni za sve tačke površi S_j) kada se posmatra energija koja se zrači do površi diska, izraz za "faktor vidjenja" (17) se svodi na

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_j, \quad (24.1)$$

odnosno, s obzirom da je $\gamma_i = \gamma_j \equiv \gamma$ (slika 24.1),

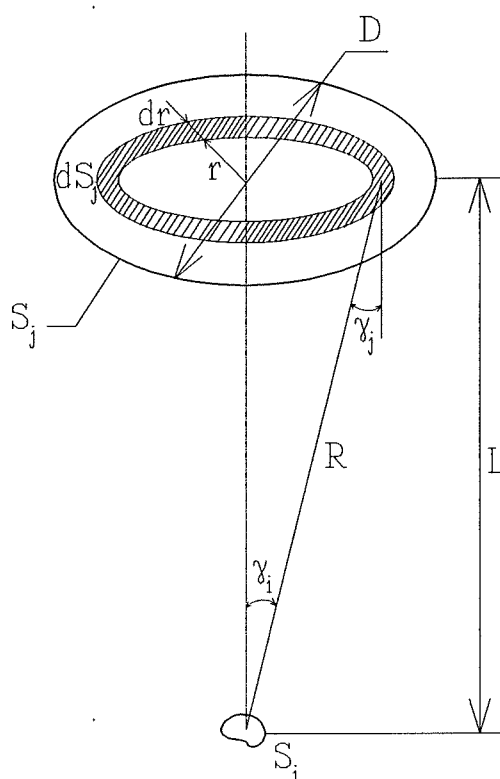
$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos^2 \gamma}{\pi R^2} dS_j. \quad (24.2)$$

Integracija po površi S_j se može izvršiti podelom diska na koncentrične prstenove poluprečnika r i širine dr , za koje su γ i R konstantni, slika 24.1 ($dS_j = 2 \pi r dr$, $R^2 = r^2 + L^2$, $\cos \gamma = L / R$), na način

$$F_{i \rightarrow j} = 2 L^2 \int_0^{D/2} \frac{r dr}{(r^2 + L^2)^2} = \frac{D^2}{4 L^2 + D^2}. \quad (24.3)$$

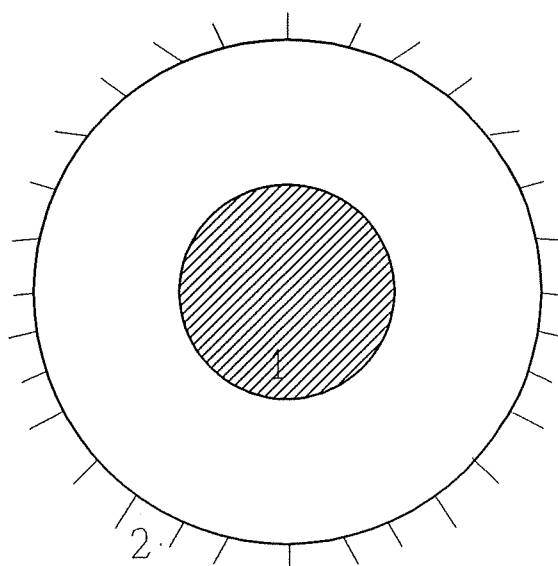
Dakle, do površi diska se prenosi deo ukupne snage zračenja sa površi malog tela koji je jednak

$$\frac{D^2}{4 L^2 + D^2}. \quad (24.4)$$



Slika 24.1

25. Na slici 25.1 je prikazan zatvoren prostor formiran između dva tela sfernih površi prikazanih površina S_1 i S_2 . Odrediti sve "faktore vidjenja" F_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2$).



Slika 25.1

Rešenje:

S obzirom da zatvoren prostor ograničavaju dve površi ($N = 2$), potrebno je direktno odrediti samo jedan "faktor vidjenja" (u skladu sa izrazom (20)).

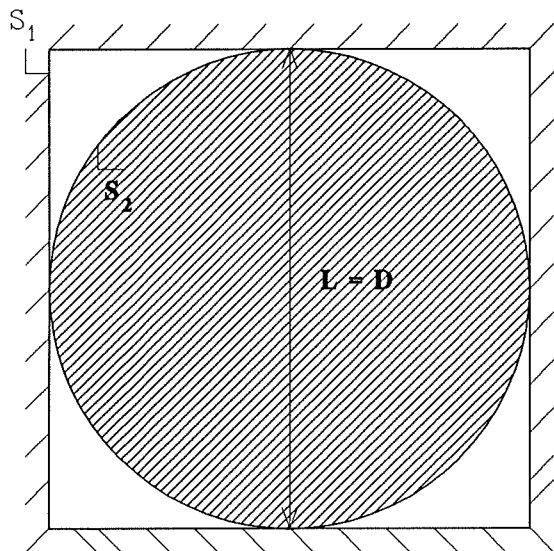
S obzirom da celokupno zračenje sa tela 1 stiže do tela 2, jednostavno se zaključuje da je $F_{12} = 1$. Po navedenim pravilima (18) i (19) se određuju ostali "faktori vidjenja":

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= 1 - F_{12} = 0 \\
 F_{21} &= \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{S_1}{S_2} \\
 F_{22} &= 1 - F_{21} = 1 - \frac{S_1}{S_2}
 \end{aligned}
 \tag{25.1}$$

Do istih rezultata je moglo da se dodje polazeći od vrednosti $F_{11} = 1$, s obzirom na konveksnost površi 1, uz primenu navedenih pravila.

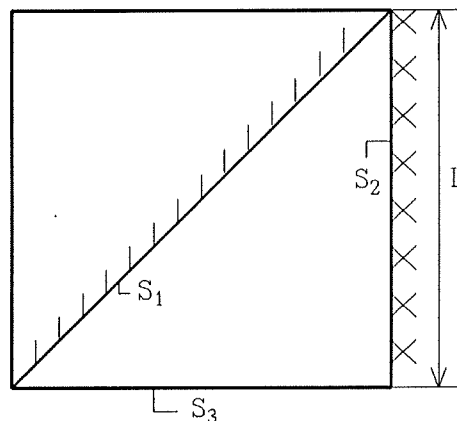
26. Odrediti "faktore vidjenja" površi S_2 sa površi S_1 (F_{12}) i površi S_1 sa površi S_2 (F_{21}) za sledeće geometrije:

a) sfera prečnika D unutar kocke stranice L , koja je jednaka prečniku D



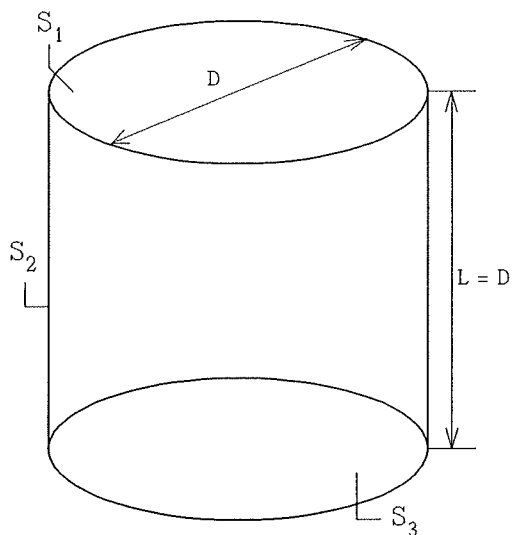
Slika 26.1

b) površ dijagonalnog preseka i jedna površ kanala kvadratnog poprečnog preseka stranice L



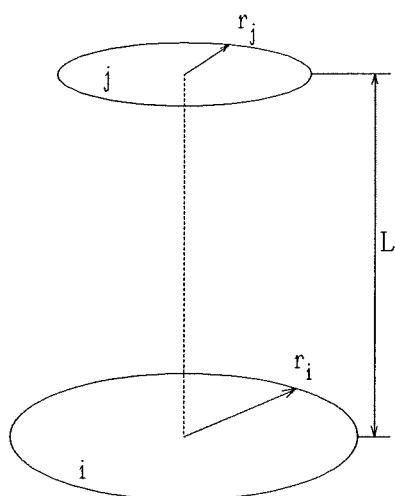
Slika 26.2

v) bazis i omotač cilindrične cevi prečnika D i dužine L , koja je jednaka prečniku D



Slika 26.3

U literaturi [3] su izloženi postupci za određivanje "faktora vidjenja" između pojedinih površi. Postupci se baziraju na formulama ili grafičkim zavisnostima kako bi se izbeglo rešavanje složenih integrala pri rešavanju praktičnih problema. Jedna od formula koje se obično daju u literaturi [3] je za "faktor vidjenja" između koaksijalnih paralelnih diskova različitih prečnika (slika 26.4). Postupak za proračun je sledeći:



$$\begin{aligned}
 R_i &= \frac{r_i}{L} \\
 R_j &= \frac{r_j}{L} \\
 s &= 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2} \\
 F_{ij} &= \frac{1}{2} \left(s - \sqrt{s^2 - 4 \left(\frac{r_j}{r_i} \right)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{26.1}$$

Slika 26.4

Rešenje:

a) S obzirom da celokupna snaga zračenja sa površi 1 dolazi do površi 2, ima se

$$F_{12} = 1. \tag{26.2}$$

Primenom pravila (18), dolazi se do druge tražene vrednosti

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{\pi D^2}{6 L^2} 1 = \frac{\pi}{6}. \tag{26.3}$$

b) Primenom pravila (19) na površ S_1 , može se napisati

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1. \tag{26.4}$$

S obzirom da je površ 1 ravna, "sopstveni faktor vidjenja" ima vrednost nula:

$$F_{11} = 0 \tag{26.5}$$

Treća jednačina za određivanje "faktora vidjenja" F_{1j} se može postaviti na osnovu simetričnosti geometrije:

$$F_{12} = F_{13} \tag{26.6}$$

Jednostavnim rešavanjem prethodnih jednačina, dobija se vrednost

$$F_{12} = \frac{1}{2}, \quad (26.7)$$

a primenom pravila (18) i vrednost

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{\sqrt{2} L}{L} 0,5 = 0,71. \quad (26.8)$$

v) Primenom postupka za određivanje "faktora vidjenja" između koaksijalnih paralelnih diskova različitih prečnika, izloženog u tekstu zadatka, za faktora F_{13} se dobija:

$$R_1 = R_3 \equiv R = \frac{D}{2} = 0,5$$

$$s = 1 + \frac{1 + R^2}{R^2} = 1 + \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 6 \quad (26.9)$$

$$F_{13} = \frac{1}{2} (6 - \sqrt{36 - 4}) \approx 0,17$$

Faktor F_{12} se određuje prema izrazu (19), primenjenom na površ 1:

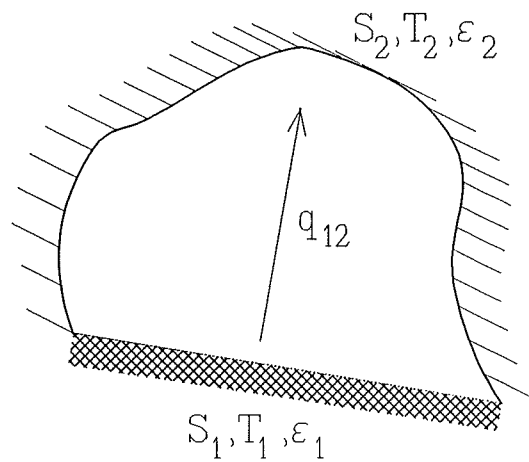
$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1, \quad (26.10)$$

gde su: $F_{11} = 0$ i $F_{13} = 0,17$. Dakle, dobija se vrednost $F_{12} = 0,83$.

Primenom pravila (18) se dobija

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{\pi D^2}{4 \pi D L} 0,83 \approx 0,21. \quad (26.11)$$

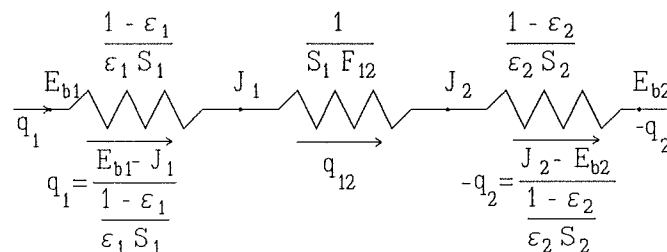
27. Postaviti radijacionu šemu koja odgovara razmeni energije izmedju dve izotermičke površi koje ograničavaju zatvoren prostor; primer je prikazan na slici 27.1. Obe površi poseduju difuziona svojstva.



Slika 27.1

Rešenje:

Primenom izloženih principa, za najjednostavniji slučaj razmene energije izmedju dve sive izotermičke površi koje ograničavaju zatvoren prostor se može formirati radijaciona šema prikazana na slici 27.2.



Slika 27.2

Primenom radijacione šeme sa slike 27.2, jednostavno se mogu rešiti zadaci 15 i 16, odnosno dobiti izrazi (15.9) i (16.8).

28. Kriogeni fluid protiče kroz dugačku cev prečnika 20 mm. Temperatura spoljašnje površi cevi je $T_1 = 77$ K, a koeficijent sivoće $\varepsilon_1 = 0,02$. Ova cev je koncentrično postavljena u veću cev prečnika 50 mm. Temperatura unutrašnje površi veće cevi je $T_2 = 300$ K, a koeficijent sivoće $\varepsilon_2 = 0,05$. Prostor između koncentričnih cevi je vakuumiran. Odrediti snagu po jedinici dužine kojom se energija predaje fluidu. Ako se između koncentričnih cevi ubaci tanak radijacioni ekran prečnika 35 mm i koeficijenta sivoće $\varepsilon_3 = 0,02$ (sa obe strane), odrediti procentualnu promenu snage prenosa toplote do fluida. Može se smatrati da sve površi zrače idealno difuzno i da radijacioni ekran ima konstantnu temperaturu po zapremini.

Rešenje:

Do predavanja energije fluidu, odnosno njegovog zagrevanja, dolazi usled razmene energije zračenjem između unutrašnje, hladne cevi i spoljašnje cevi, čija je temperatura jednaka temperaturi ambijenta. Za slučaj da ne postoji radijacioni ekran između cevi, opisanom sistemu, odnosno razmeni energije zračenjem između spoljašnje površi unutrašnje cevi i unutrašnje površi spoljašnje cevi (koje ograničavaju zatvoren prostor), odgovara radijaciona šema prikazana na slici 27.2.

Prema radijacionoj šemi, snaga kojom se energija predaje od fluida ka ambijentu (od cevi manjeg ka cevi većeg prečnika) se određuje prema izrazu

$$q = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\sum R} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}. \quad (28.1)$$

S obzirom na konveksnost spoljašnje površi unutrašnje cevi, koja učestvuje u razmeni energije zračenjem, vrednost "faktora vidjenja" F_{12} iznosi 1. Prema tome i odnosu površina spoljašnje i unutrašnje cevi ($S_2/S_1 = r_2/r_1$), iz izraza (28.1) se jednostavno dolazi do

$$q = \frac{\sigma_c S_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{r_1}{r_2}}, \quad (28.2)$$

odnosno

$$q = \frac{\sigma_c (\pi D_1 L) (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{r_1}{r_2}}. \quad (28.3)$$

Snaga prenosa energije zračenjem od unutrašnje ka spoljašnjoj cevi po jedinici dužine cevi je određena izrazom

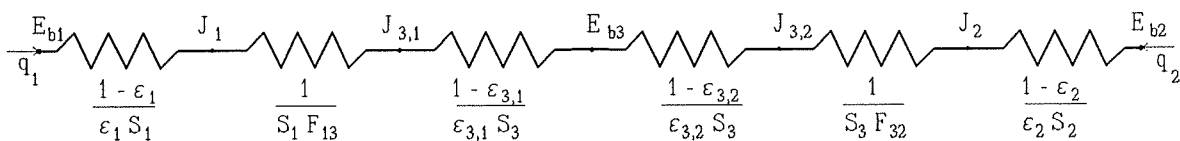
$$q_l' = \frac{q}{L} = \frac{\sigma_c (\pi D_1) (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \frac{r_1}{r_2}} \quad (28.4)$$

i iznosi

$$q_l' = \frac{5,67 \pi 0,02 (0,77^4 - 3^4)}{\frac{1}{0,02} + \frac{1 - 0,05}{0,05} \frac{0,02}{0,05}} = -0,5 \frac{W}{m} \quad (28.5)$$

Dakle, kriogeni fluid se zagreva energijom snage 0,5 W po 1 m cevi kroz koju se transportuje, u slučaju da ne postoji radijacioni ekran.

Za slučaj da postoji radijacioni ekran između cevi, radijaciona šema ima izgled prikazan na slici 28.1. Šema važi pod pretpostavkom iz teksta zadatka da radijacioni ekran predstavlja izotermičku zapreminu, što je ispunjeno kada je on veoma tanak ili idealno toploprovodan. Drugim rečima, šema važi u slučaju da su jednake temperature obe granične površi radijacionog ekrana. Šema je data za opšti slučaj da se razlikuju koeficijenti sivoće unutrašnje i spoljašnje granične površi radijacionog ekrana ($\epsilon_{3,1}$ i $\epsilon_{3,2}$). Prema uslovu zadatka, kod korišćenog ekrana oni su jednaki ($\epsilon_3 = \epsilon_{3,1} = \epsilon_{3,2}$), što će se uvrstiti u izraz za određivanje snage razmene energije zračenjem.



Slika 28.1

Prema radijacionoj šemi i vrednostima "faktora vidjenja", $F_{13} = F_{32} = 1$, snaga kojom se energija predaje od fluida ka ambijentu se određuje prema izrazu

$$q = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\sum R} \quad (28.6)$$

gde je

$$\sum R = \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{13}} + \frac{1 - \varepsilon_{3,1}}{\varepsilon_{3,1} S_3} + \frac{1 - \varepsilon_{3,2}}{\varepsilon_{3,2} S_3} + \frac{1}{S_3 F_{32}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}, \quad (28.7)$$

odnosno

$$\sum R = \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 F_{13}} + 2 \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1}{S_3 F_{32}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}. \quad (28.8)$$

Podužna vrednost otpora se određuje prema izrazu

$$\sum R_l = L \sum R = \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \pi D_1} + \frac{1}{\pi D_1 F_{13}} + 2 \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 \pi D_3} + \frac{1}{D_3 \pi F_{32}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \pi D_2}, \quad (28.9)$$

iz koga se, po zameni brojnih vrednosti,

$$\sum R_l = \frac{1 - 0,02}{0,02 \pi 0,02} + \frac{1}{\pi 0,02} + 2 \frac{1 - 0,02}{0,02 \pi 0,035} + \frac{1}{0,035 \pi} + \frac{1 - 0,05}{0,05 \pi 0,05}, \quad (28.10)$$

dobija

$$\sum R_l = 1814,4 m^{-1}. \quad (28.11)$$

Snaga prenosa energije zračenjem od unutrašnje ka spoljašnjoj cevi, po jedinici dužine cevi, je određena izrazom

$$q_l'' = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\sum R_l} \quad (28.12)$$

i iznosi

$$q_l'' = \frac{5,67 (0,77^4 - 3^4)}{1814,4} = -0,25 \frac{W}{m}. \quad (28.13)$$

U slučaju da je postavljen radijacioni ekran, kriogeni fluid se zagreva sa 0,25 W po 1 m cevi. To znači da je postavljenjem radijacionog zaklona snaga razmene energije zračenjem promenjena za

$$\frac{|q_i''| - |q_i'|}{|q_i'|} 100 (\%), \quad (28.14)$$

odnosno umanjena za 50 %. Vidi se da se postigao značajan rezultat u smanjenju razmene energije zračenjem, bez obzira na veoma niske koeficijente sivoće površi unutrašnje i spoljašnje cevi (ε_1 i ε_2).

Primenom radijacione šeme sa slike 28.1, jednostavno se može rešiti drugi deo zadatka 15, odnosno dobiti izraz za snagu razmene energije zračenjem između dve beskonačno velike paralelne površi između kojih je postavljen radijacioni ekran (15.17).

29. Dva koncentrična paralelna diska, prečnika $D_1 = 0,6$ m i $D_2 = 0,9$ m, koji se mogu posmatrati kao crna tela, nalaze se na rastojanju od $l = 0,9$ m. Njihove temperature iznose $T_1 = 350$ K i $T_2 = 500$ K. Izračunati snage prenosa toplote zračenjem od jednog ka drugom disku i ukupne snage razmene energije zračenjem svakog od njih sa okolinom, za sledeće slučajeve:

- a) kada se nalaze u slobodnom prostoru (kada nema razmene toplote sa drugim telima),
- b) kada je prostor između njih zatvoren površi oblika omotača zarubljene kupe. Ova površ je idealno toplotno izolovana od okoline, pa zbog toga sa njom ne razmenjuje toplotu i
- v) kada je prostor između njih zatvoren površi oblika omotača zarubljene kupe, koja ima svojstva crnog tela i čija se temperatura održava na vrednosti od $T_3 = 250$ K.

Aktivne su samo površi diskova okrenute ka drugom disku.

Rešenje:

Faktor vidjenja između diskova (sa diska većeg prečnika (D_2) na disk manjeg prečnika (D_1)) se određuje prema izrazima (26.1). Njihovom primenom se dobija:

$$R_1 = \frac{0,6}{0,9} = 0,3333 \quad R_2 = \frac{0,9}{0,9} = 0,5$$

$$s = 1 + \frac{1 + 0,3333^2}{0,5^2} = 5,4444 \quad (29.1)$$

$$F_{21} = \frac{1}{2} \left(5,4444 - \sqrt{5,4444^2 - 4 \left(\frac{0,6}{0,9} \right)^2} \right) = 0,16579$$

Primenom pravila (19) da je zbir faktora vidjenja jednak jedinici, dobija se da je faktor vidjenja omotača, sa bazisa prečnika D_2 , uz $F_{22} = 0$, jednak

$$F_{23} = 1 - F_{21} = 1 - 0,16579 = 0,83421 . \quad (29.2)$$

Primenom pravila (18) da je odnos faktora vidjenja $F_{12}/F_{21} = S_2/S_1 = (r_2/r_1)^2 = (D_2/D_1)^2$, dobija se vrednost faktora F_{12} :

$$F_{12} = 0,16579 \left(\frac{0,9}{0,6} \right)^2 = 0,37303 , \quad (29.3)$$

a prema njemu, uz $F_{11} = 0$, i

$$F_{13} = 1 - F_{12} = 1 - 0,37303 = 0,62697 . \quad (29.4)$$

Površ omotača zarubljene kupe se izračunava prema izrazima

$$S_3 = \pi i (r_1 + r_2) \quad (29.5)$$

$$i = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + l^2}$$

Dakle,

$$S_3 = \pi \sqrt{(0,45 - 0,3)^2 + 0,9^2} (0,45 + 0,3) = 2,1498 m^2. \quad (29.6)$$

Faktori vidjenja F_{31} i F_{32} su određeni izrazima $F_{31} = F_{13} (S_1/S_3)$ i $F_{32} = F_{23} (S_2/S_3)$ i imaju vrednosti

$$F_{31} = 0,62697 \frac{\pi 0,3^2}{2,1498} = 0,08246 \quad (29.7)$$

$$F_{32} = 0,83421 \frac{\pi 0,45^2}{2,1498} = 0,24686, \quad (29.8)$$

a F_{33}

$$F_{33} = 1 - 0,24686 - 0,08246 = 0,67068. \quad (29.9)$$

a) Snaga kojom se energija zračenjem razmenjuje između diskova, kao crnih tela, je određena izrazom

$$q_{21} = \sigma_c S_2 F_{21} (T_2^4 - T_1^4). \quad (29.10)$$

Izračunata, njena vrednost iznosi

$$q_{21} = 5,67 (0,45^2 \pi) 0,16579 (5^4 - 3,5^4) = 284 W \quad (29.11)$$

Izraz za razmenu energije između dva crna tela (29.10) se jednostavno izvodi, s obzirom da celokupna energija koja se sa crnog tela i zrači ka crnom telu j apsorbira telom j (označimo snagu prenosa ove energije sa $q_{i \rightarrow j}$) i obrnuto ($q_{j \rightarrow i}$). Izrazi za ove snage su

$$q_{i \rightarrow j} = F_{ij} S_i \sigma_c T_i^4 = S_i F_{ij} \sigma_c T_i^4 \quad (29.12)$$

i

$$q_{j \rightarrow i} = F_{ji} S_j \sigma_c T_j^4 = S_j F_{ji} \sigma_c T_j^4. \quad (29.13)$$

Energija se od tela i ka telu j prenosi snagom

$$q_{ij} = q_{i \rightarrow j} - q_{j \rightarrow i}. \quad (29.14)$$

S obzirom na izraze (29.12) i (29.13), snaga prenosa energije od tela i ka telu j se može odrediti prema izrazu

$$q_{ij} = \sigma_c S_i F_{ij} T_i^4 - \sigma_c S_j F_{ji} T_j^4, \quad (29.15)$$

odakle se, primenom pravila (18), dobija izraz (29.10).

Snaga kojom se energija sa diska 1 odvodi u okolinu kroz omotač zarubljene kupe se određuje kao razlika snaga ukupne emitovane energije sa površi diska 1 i dela emitovane energije sa diska 1 ka disku 2, odnosno prema izrazu

$$q_{1ok} = S_1 \sigma T_1^4 - S_1 F_{12} \sigma T_1^4, \quad (29.16)$$

odakle se jednostavno dobija

$$q_{1ok} = S_1 \sigma T_1^4 (1 - F_{12}). \quad (29.17)$$

Zamenom brojnih vrednosti u prethodni izraz za snagu odvodjenja energije sa diska 1 u okolinu, dobija se

$$q_{1ok} = \pi 0,3^2 5,67 3,5^4 (1 - 0,37303) = 150,8 \text{ W}. \quad (29.18)$$

Da bi se održalo specificirano stanje, disku 1 je potrebno dovoditi energiju snagom određenom izrazom

$$q_1 = S_1 \sigma_c T_1^4 - S_2 F_{21} \sigma_c T_2^4, \quad (29.19)$$

odnosno

$$q_1 = S_1 \sigma_c (T_1^4 - F_{12} T_2^4). \quad (29.20)$$

Izračunata, ona iznosi

$$q_1 = \pi 0,3^2 5,67 (3,5^4 - 0,37303 5^4) = -133,2 \text{ W}. \quad (29.21)$$

Drugim rečima, disk 1 od okoline prima energiju snagom 133,2 W. Snaga kojom se energija sa diska 2 odvodi u okolinu kroz omotač zarubljene kupe je određena izrazom

$$q_{2ok} = S_2 \sigma_c T_2^4 - S_2 F_{21} \sigma_c T_2^4, \quad (29.22)$$

odnosno

$$q_{2ok} = S_2 \sigma_c T_2^4 (1 - F_{21}). \quad (29.23)$$

Izračunata, ona iznosi

$$q_{2ok} = \pi 0,45^2 5,67 \cdot 5^4 (1 - 0,16579) = 1880,7 \text{ W}. \quad (29.24)$$

Da bi se održalo specificirano stanje, s obzirom da je $T_2 > T_1$ disku 2 je sigurno potrebno dovoditi energiju. Snaga ove energije se može izračunati na sličan način kao za disk 1,

$$q_2 = S_2 \sigma_c T_2^4 - S_1 F_{12} \sigma_c T_1^4, \quad (29.25)$$

ali i jednostavnije, na osnovu energetskeg bilansa:

$$q_2 = q_{21} + q_{2ok}. \quad (29.26)$$

Izračunata, ona iznosi

$$q_2 = 284 + 1880,7 = 2164,7 \text{ W}. \quad (29.27)$$

b) U krajnjem energetskeg bilansu, energija se prenosi samo od površi diska 2 ka površi diska 1. Deo energije se prenosi direktno od diska 2 ka disku 1, a deo posle refleksije od idealno izolovane površi omotača zarubljene kupe. Deo energije koji se prenosi direktno je određen izrazom (29.10), odnosno

$$q_{21d} = \sigma_c S_2 F_{21} (T_2^4 - T_1^4) \quad (29.28)$$

i jednak je 284 W. Deo koji se prenosi refleksijom od izolovane površi se određuje na osnovu energetskeg bilansa za izolovanu površ (jednakost energija koje se prenose od diska 2 ka izolovanoj površi i od izolovane površi ka disku 1):

$$\sigma_c S_2 F_{23} (T_2^4 - T_3^4) = \sigma_c S_3 F_{31} (T_3^4 - T_1^4) \quad (29.29)$$

Rešavanjem prethodne jednačine po T_3^4 , dobija se

$$T_3^4 = \frac{F_{31}}{F_{31} + F_{32}} T_1^4 + \frac{F_{32}}{F_{31} + F_{32}} T_2^4, \quad (29.30)$$

odnosno $T_3 = 474,3 \text{ K}$. Snaga prednosa toplote preko izolovane površi se može odrediti iz izraza

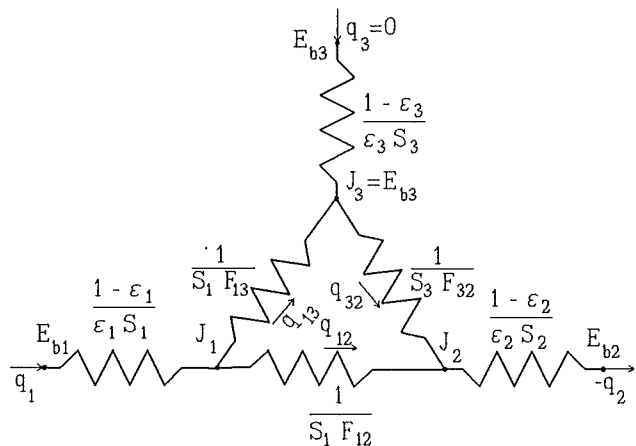
$$q_{21i} = \sigma_c S_2 F_{23} (T_2^4 - T_3^4). \quad (29.31)$$

Izračunata, ona iznosi 357,8 W. Ukupna snaga prenosa energije između diskova 2 i 1 se izračunava sabiranjem direktne i indirektno komponente,

$$q_{21} = q_{21d} + q_{21i}, \quad (29.32)$$

i iznosi 641,8 W.

Ovaj deo zadatka se mogao jednostavnije i kraće rešiti primenom radijacionih šema. Šema bi sadržala tri čvora (dva diska i omotač zarubljene kupe). Zbog idealne toplotne izolovanosti od okoline, omotač zarubljene kupe razmenjuje toplotu sa okolinom samo zračenjem sa diskovima 1 i 2, pa je snaga injektiranja u čvor koji odgovara omotaču zarubljene kupe (q_3) jednaka nuli.



Slika 29.1

v) Snaga kojom se energija zračenjem razmenjuje između dva crna tela i i j se određuje po izrazu (29.10), pa se za razmenu između površi diskova 1 i 2 i površi omotača zarubljene kupe mogu napisati izrazi:

$$q_{21} = \sigma_c S_2 F_{21} (T_2^4 - T_1^4) \quad (29.33)$$

$$q_{23} = \sigma_c S_2 F_{23} (T_2^4 - T_3^4) \quad (29.34)$$

$$q_{13} = \sigma S_1 F_{13} (T_1^4 - T_3^4) \quad (29.35)$$

Izračunavanjem se dobijaju njihove vrednosti $q_{2 \rightarrow 1} = 284$ W, $q_{2 \rightarrow 3} = 1763,1$ W, $q_{1 \rightarrow 3} = 111,6$ W.

Da bi se održalo specificirano stanje, disku 1 je potrebno dovoditi energiju snagom

$$q_1 = q_{1 \rightarrow 3} - q_{2 \rightarrow 1} = -172,4 \text{ W},$$

disku 2

$$q_2 = q_{2 \rightarrow 1} + q_{2 \rightarrow 3} = 2047,1 \text{ W},$$

a sa površi omotača zarubljene kupe odvoditi

$$q_3 = q_{1 \rightarrow 3} + q_{2 \rightarrow 3} = 1874,7 \text{ W}.$$