ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 26. 5. 2022.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Кроз једножилни кабл попречног пресека бакра (специфичне електричне проводности $\sigma = 56\cdot10^6$ S/m) $S = 16$ mm^2 протиче струја површинске густине $J = 4{,}5$ A/mm^2. Око бакарног проводника је постављен слој изолације дебљине $\delta = 2$ mm, топлотне проводности $\lambda_{iz} = 2$ W/(mK) и коефицијента сивоће $\varepsilon = 0{,}8$. Колико износи вредност температура изолације у њеној најтоплијој тачки? Температура околног ваздух износи $\vartheta_a = 40$°C, а коефицијент преласка топлоте струјањем са површи изолационог слоја на ваздух је $\alpha = 5$ W/(m^{2}K). Општа температурне једначине у цилиндричном координатном систему гласи:

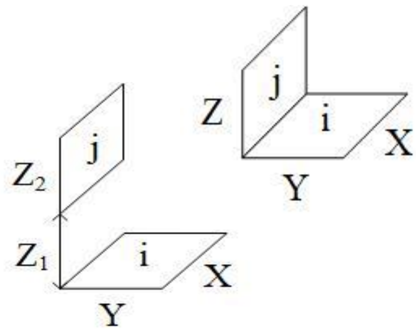
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)+q_v=\rho c_p\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$ (2п)

2. Колики је процентуални добитак енергије и повећан трошак ако се користи проточни бојлер уместо акумулационог. Сматрати да се половина количине топле воде троши у току дана, када је електрична енергија 4 пута скупља него ноћу, а половина у току ноћи. Акумулациони бојлер се загрева само у периоду јефтиније електричне енергије. Температура воде у водоводној мрежи износи 15°C, а укупна потрошња топле воде температуре 45°C у току дана (24h) је 120 l. Температура од 45°C се постиже мешањем воде из бојлера са водом из водовода. Максимална температура воде у бојлеру износи 90°C, а минимална 50°C. Губитке у акумулационом бојлеру израчунати према средњој вредности минималне и максималне температуре воде у бојлеру у току дана. Позната је вредност топлотног отпора између воде у бојлеру и амбијента температуре 20°C $R^T = 0{,}5333$ K/W. Густина воде износи ρ_v=1000kg/m^3, специфични топлотни капацитет воде c_{pv}=4200J/(kgK). (2.5п)

3. Полазећи од израза за фактор виђења за геометрију два управна правоугаоника са заједничком ивицом (горња десна слика), где је $H = \frac{Z}{X}$, а $W = \frac{Y}{X}$:

$$F_{ij}=\frac{1}{\pi W}\Bigg(W\tan^{-1}\frac{1}{W}+H\tan^{-1}\frac{1}{H}-(H^2+W^2)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\frac{1}{(H^2+W^2)^{\frac{1}{2}}}+$$
$$+\frac{1}{4}ln\left\{\frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2}\left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)}\right]^{W^2}\left[\frac{H^2(1+W^2+H^2)}{(1+H^2)(W^2+H^2)}\right]^{H^2}\right\}\Bigg),$$

одредити фактор виђења за случај да управни правоугаоници немају заједничку ивицу, за геометрију приказану на слици доле лево – $X = 1$ m, $Y = 1$ m, $Z_1 = 1$ m, $Z_2 = 1$ m. (2п)



4. Извести израз за ефикасност ребра за хлађење којим се одводи топлота са тела температуре ϑ. Ребро је кружног попречног пресека пречника D и дужине L. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре ϑ_a износи α. Топлотна проводности материјала од кога је сачињено ребро износи λ. При постављању граничног услова на базису ребра која се хлади сматрати да је његова температура једнака ϑ_a. (2п)

5. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun} = 102$°C и $\vartheta_{hun} = 95{,}9$°C, температуре хладног и топлог ваздуха: $\vartheta_{hvn} = 40$°C и $\vartheta_{tvn} = 64{,}55$°C, номинална снага $P_{hn} = 210$ kW, проток уља $Q_{un} = 68$ m^3/h и проток ваздуха $Q_{vn} = 28{,}29$ m^3/s. Колико износи процентуално смањење укупног коефицијента преноса топлоте услед запрљања хладњака у тренутку у коме је радна тачка хладњака окарактерисана следећим параметрима: протоци уља и ваздуха су једнаки номиналним, температура уља на уласку у хладњак $\vartheta_{tu} = 90$°C, снага хлађења једнака номиналној, а температура амбијента 20°C? Сматрати да су параметри уља и ваздуха исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру. (2.5п)

1. Задатак

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 16}{\pi}} = 4{,}51\ mm \tag{1.1}$$

па је спољашњи пречник једножилног кабла:

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 4{,}51 + 2 \cdot 2 = 8{,}51\ mm \tag{1.2}$$

Подужна снага генерисања топлоте у проводнику износи

$$P'_\gamma = RI^2 = \frac{1}{\sigma \cdot S} \cdot (J \cdot S)^2 = \frac{1}{56 \cdot 16} \cdot (4{,}5 \cdot 16)^2 = 5{,}79\ {}^{W}\!/_{m} \tag{1.3}$$

Подужна топлотна отпорност изолације кабла износи

$$R'_{iz} = \frac{1}{2\pi\lambda_{iz}} \ln \frac{D_s}{D_u} = 0{,}05\ {}^{mK}\!/_{W} \tag{1.4}$$

У устаљеном стању, сва топлота генерисана у проводнику преноси се кроз изолацију до њене површине и одатле се струјањем и зрачењем предаје амбијенту. На основу овога можемо написати следећу једначину:

$$P'_\gamma = \alpha D_s \pi(\vartheta_s - \vartheta_a) + \varepsilon\sigma_c D_s \pi((\vartheta_s + 273{,}15)^4 - (\vartheta_a + 273{,}15)^4) \tag{1.5}$$

Из ове једначине добијамо вредност температуре површи изолације која је у додиру са ваздухом ϑ_s = 59,47C.

Температура граничне површи изолације која је у додиру са бакарним проводником може се одредити из следећег израза:

$$P'_\gamma = \frac{\vartheta_u - \vartheta_s}{R'_{iz}} \tag{1.6}$$

и износи ϑ_u = 59,76°C.

2. Задатак

Посматра се прво случај када се користи акумулациони бојлер. Потрошњом V = 120 l воде температуре $\vartheta_{potrš}$ = 45°C током једног дана температура топле воде у бојлеру опадне са ϑ_{max} = 90°C на ϑ_{min} = 50°C. Током сваке употребе потребно је потрошеној количини воде предати енергију потребну да се она загреје са ϑ_{vod} = 15°C на $\vartheta_{potrš}$ = 45°C:

$$\begin{gathered} E_{potrš}^{aku} = \int_{t=0}^{24h} \rho_v c_{pv} Q_v (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})\, dt = \rho_v c_{pv} (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) \int_{t=0}^{24h} Q_v\, dt = \\ \rho_v c_{pv} (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) V = 15{,}12\ MJ = 4{,}2\ kWh \end{gathered} \tag{2.1}$$

Енергија која се у току дана изгуби провођењем кроз топлотну изолацију бојлера може се апроксимирати као:

$$E_{gub} = P_{prov} \cdot 24h = \frac{\frac{\vartheta_{max} + \vartheta_{min}}{2} - 20°\mathrm{C}}{R^T} \cdot 24h = 2{,}25\ kWh \tag{2.2}$$

Дакле, укупан дневни утрошак енергије једнак је

$$E_{uk}^{aku} = E_{potrš}^{aku} + E_{gub} = 7.85\ kWh \tag{2.3}$$

Ова енергија обезбеђује се утрошком електричне енергије током јефтине тарифе. Њене цена (ако је цена једног киловата јефтине електричне енергије означена са *cena*) једнака је

$$C_{uk}^{aku} = E_{uk}^{aku} \cdot cena\ [RSD] \tag{2.4}$$

У случају када се користи проточни бојлер, вода се загрева само онда када се и троши.
Дакле, укупна потребна количина енергије за загревање утрошене воде у току једног дана једнака је

$$E_{potr}^{prot} = \rho_v c_{pv} V (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) = 15{,}12\ MJ = 4{,}2\ kWh \tag{2.5}$$

У случају када се користи проточни бојлер нема никаквих губитака, па важи

$$E_{uk}^{prot} = E_{potrš}^{prot} = 4{,}2\ kWh \tag{2.6}$$

Половина ове енергије обезбеђује се током скупе, а половина током јефтине тарифе. Укупна цена утрошене електричне енергије при употреби проточног бојлера је

$$C_{uk}^{prot} = \frac{E_{uk}^{prot}}{2} \cdot 4 \cdot cena + \frac{E_{uk}^{prot}}{2} \cdot cena = \frac{5}{2} \cdot E_{uk}^{prot} \cdot cena\ [RSD] \tag{2.7}$$

Употребом проточног бојлера остварује се уштеда у утрошеној електричној енергији од 2,25 kWh тј. смањење за 34,9%.
Однос цена утрошене електричне енергије је

$$\frac{C_{uk}^{aku}}{C_{uk}^{prot}} = \frac{E_{uk}^{aku} \cdot cena}{\frac{5}{2} \cdot E_{uk}^{prot} \cdot cena} = 0.614 \tag{2.8}$$

односно, цена утрошене енергије при примени проточног бојлера већа је за 62,8%.

У случају проточног бојлера проток воде из водоводне мреже, температуре 15°C, је константан. У случају акумулационог бојлера мења се вредност количине воде која се истаче из бојлера (што је температура воде у бојлеру ϑ_{vb} већа, мањи је проток уласка воде температуре 15°C и изласка воде температуре ϑ_{vb}).

3. Задатак

Тражени фактор виђења F_{ij} се може одредити као разлика фактора виђења F_{i12} између хоризонталне површи i (X x Y) и вертикалне површи димензија X x (Z_1+Z_2), и фактора виђења F_{i1} између хоризонталне површи i (X x Y) и вертикалне површи j са прве слике (X x Z_1).

$W = \frac{Y}{X}, H_{12} = \frac{Z_1+Z_2}{X}, H_1 = \frac{Z_1}{X}$

$$F_{i12} = \frac{1}{\pi W}\left(W \tan^{-1}\frac{1}{W} + H_{12}\tan^{-1}\frac{1}{H_{12}} - \left({H_{12}}^2 + W^2\right)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\left({H_{12}}^2 + W^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} ln\left\{\frac{(1+W^2)(1+{H_{12}}^2)}{1+W^2+{H_{12}}^2}\left[\frac{W^2(1+W^2+{H_{12}}^2)}{(1+W^2)(W^2+{H_{12}}^2)}\right]^{W^2}\left[\frac{{H_{12}}^2(1+W^2+{H_{12}}^2)}{(1+{H_{12}}^2)(W^2+{H_{12}}^2)}\right]^{{H_{12}}^2}\right\}\right) \tag{1.1}$$

$$F_{i1} = \frac{1}{\pi W}\left(W \tan^{-1}\frac{1}{W} + H_1\tan^{-1}\frac{1}{H_1} - \left({H_1}^2 + W^2\right)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\left({H_1}^2 + W^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} ln\left\{\frac{(1+W^2)(1+{H_1}^2)}{1+W^2+{H_1}^2}\left[\frac{W^2(1+W^2+{H_1}^2)}{(1+W^2)(W^2+{H_1}^2)}\right]^{W^2}\left[\frac{{H_1}^2(1+W^2+{H_1}^2)}{(1+{H_1}^2)(W^2+{H_1}^2)}\right]^{{H_1}^2}\right\}\right) \tag{1.2}$$

$$F_{ij} = F_{i12} - F_{i1} = 0{,}2329 - 0{,}2 = 0{,}0329 \tag{1.3}$$

4. Задатак

Диференцијална једначина која описује промену температуре дуж ребра у устаљеном добија се на следећи начин:

$$q_s = -\lambda\, grad\, \vartheta \tag{3.1}$$

$$q_{sx} = -\lambda\, \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.2}$$

$$q(x) = -\lambda \frac{D^2\pi}{4}\, \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.3}$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\lambda \frac{D^2\pi}{4}\, \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \tag{3.4}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha(\vartheta(x) - \vartheta_a)D\pi dx \tag{3.5}$$

$$dq_\alpha(x) = -dq(x) \tag{3.6}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{4\alpha}{\lambda D}(\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.7}$$

Опште решење диференцијалне једначине:

$$\vartheta(x) = C_1 \cdot e^{m\cdot x} + C_2 \cdot e^{-m\cdot x} + \vartheta_a \tag{3.8}$$

где је

$$\vartheta m = \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda D}} \tag{3.9}$$

Интеграционе константе које фигуришу у општем решењу одређују се из граничних услова за базисе ребра:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta \tag{3.10}$$

$$\vartheta(x = L) = \vartheta_a \tag{3.11}$$

Заменом општег решења диференцијалне једначине у изразе за граничне услове добија се систем једначина

$$C_1 + C_2 + \vartheta_a = \vartheta \tag{3.12}$$

$$C_1 \cdot e^{m\cdot L} + C_2 \cdot e^{-m\cdot L} + \vartheta_a = \vartheta_a \tag{3.13}$$

и њиховим решавањем по C_1 и C_2 добијају се интеграционе константе:

$$C_1 = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} \tag{3.14}$$

$$C_2 = \frac{-(\vartheta - \vartheta_a)}{1 - e^{2mL}} e^{2mL} \tag{3.15}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} e^{mx} + \frac{-(\vartheta - \vartheta_a)e^{2mL}}{1 - e^{2mL}} e^{-mx} + \vartheta_a = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (e^{mx} - e^{2mL - mx}) + \vartheta_a \tag{3.16}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$\begin{aligned} q_{uk} &= \int_{x=0}^{L} \alpha(\vartheta(x) - \vartheta_a) dS = \int_{x=0}^{L} \alpha \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (e^{mx} - e^{2mL - mx}) D\pi dx \\ &= \alpha D\pi \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} \left(\frac{1}{m} e^{mL} + \frac{1}{m} e^{2mL - mL} - \frac{1}{m} e^{m \cdot 0} - \frac{1}{m} e^{2mL - m\cdot 0} \right) \\ &= \frac{\alpha D\pi}{m} \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (2e^{mL} - 1 - e^{2mL}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ефикасност ребра за хлађење дефинише се као однос снаге којом се топлота односи са реалног ребра и снаге којом би се топлота односила са површи омотача цилиндричног ребра за хлађење чија би температура била ϑ:

$$\eta = \frac{q_{uk}}{\alpha S_{rebra}(\vartheta - \vartheta_a)} = \frac{\frac{\alpha D\pi}{m} \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (2e^{mL} - 1 - e^{2mL})}{\alpha (DL\pi + D^2\pi/4)(\vartheta - \vartheta_a)} = \frac{2e^{mL} - 1 - e^{2mL}}{m\left(L + \frac{D}{4}\right)(1 - e^{2mL})} \tag{3.18}$$

5. Задатак

На основу извођења са часова предавања број 4 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_p S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{5.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 31{,}35°\text{C} \tag{5.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 62°\text{C} \tag{5.3}$$

Заменом ових вредности у израз (5.1), уз P_{hn} = 210 kW добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 4{,}672 \frac{kW}{°\text{C}} \tag{5.4}$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{5.5}$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{5.6}$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v Q_{vn} c_{pv} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}} = 8{,}554 \frac{kW}{°\text{C}} \tag{5.7}$$

$$\rho_u Q_{un} c_{pu} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}} = 34{,}426 \frac{kW}{°\text{C}} \tag{5.8}$$

У посматраној радној тачки хладњака имамо да је $P_h = P_{hn}$. Проток ваздуха једнак је номиналном $Q_v = Q_{vn}$, док температура хладног ваздуха ϑ_{hv} = 20°C. Сада, за ову снагу хлађења и овај проток можемо написати израз аналоган изразу (5.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{5.9}$$

На основу израза (5.9) долазимо до:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 44{,}55°\text{C} \tag{5.10}$$

Проток уља једнак је номиналним $Q_u = Q_{un}$. Температура топлог уља опала је на ϑ_{tu} = 90°. И за уље се сада може написати израз аналоган изразу (5.10):

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 83{,}9°\text{C} \tag{5.11}$$

За снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (5.1):

$$P_h = \frac{K_p^z S(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}}\right)} \tag{5.12}$$

Из претходног израза се добија

$$K_p^z S = \frac{P_h \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 3{,}946\,\frac{kW}{°\mathrm{C}}, \tag{5.13}$$

односно

$$\frac{K_p^z S}{K_p\, S} = \frac{K_p^z}{K_p} = \frac{3{,}946}{4{,}672} = 0{,}845 \tag{5.14}$$

Дакле, услед запрљања дошло је до смањења укупног коефицијента преноса топлоте за 15,5%.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

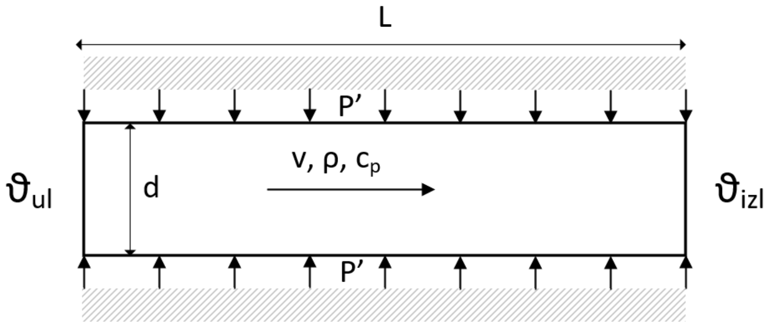
Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 11. 6. 2022.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Извести израз за топлотни отпор између две концентричне сфере пречника D_u и D_s. Топлотна проводност материјала који испуњава простор ове сферне љуске износи λ. Израз за градијент температуре у сферном координатном систему (φ – азимутни угао, θ – зенитни угао) гласи:

$$grad\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{\imath}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\vec{\imath}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{\imath}_\varphi. \text{ (2п)}$$

2. Кроз цев која дужине $L = 5$ m и унутрашњег пречника $d = 5$ cm, протиче уље брзином $v = 10$ cm/s. Уље се загрева помоћу грејача, који је са друге стране идеално топлотно изолован, подужном снагом $P' = 400$ W/m. Густина уља износи $\rho = 980$ kg/m^3, а специфични топлотни капацитет c_p= 2300 J/kgK. Коефицијент преласка топлоте струјањем са уља на зид цеви једнак $\alpha = 80$ W/(m^{2}K). Колико износи максимална температура уља на уласку у цев при којој температура грејача (цеви) неће прећи ϑ_{max}^{cevi}=80°C. (2п)



3. Цев пречника $D_u = 5$ cm, емисивности $\varepsilon_u = 0{,}8$ и температуре $\vartheta_u = 800$°C се налази унутар спољне цеви унутрашњег пречника $D_s = 8$ cm емисивности $\varepsilon_s = 0{,}7$. По обиму унутрашње цеви се генерише топлота подужне снаге $q_l = 1000$ W/m. Колико износи температура унутрашње површ спољашње цеви у наведеним случају и у случају да се између две цеви стави трећа, унутрашњег пречника $D_{eu} = 7$ cm, спољашњег пречника $D_{es} = 7{,}1$ cm и емисивности обе стране $\varepsilon_e = 0{,}2$? Сматрати да је отпор преносу топлоте провођењем кроз цев занемарљиво мали. (2п)

4. Одредити снагу која се са ребра преноси ка амбијенту температуре ϑ_a. Коефицијент преласка топлоте са ребра на ваздух износи α. Ребро је кружног попречног пресека пречника D и дужине L. Топлотна проводности материјала од кога је сачињено ребро износи λ. Сваки од два базиса ребра је ослоњен на тело температуре ϑ_b. (2,5п)

5. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun} = 102$°C и $\vartheta_{hun} = 95{,}9$°C, температуре хладног и топлог ваздуха: $\vartheta_{hvn} = 40$°C и $\vartheta_{tvn} = 64{,}55$°C, номинална снага $P_{hn} = 210$ kW, проток уља $Q_{un} = 68$ m^3/h и проток ваздуха $Q_{vn} = 28{,}29$ m^3/s. Колико износи процентуално смањење укупног коефицијента преноса топлоте услед запрљања хладњака у тренутку у коме је радна тачка хладњака окарактерисана следећим параметрима: проток ваздуха једнак номиналном, проток уља 20% мањи од номиналног, температура уља на уласку у хладњак $\vartheta_{tu} = 90$°C, температура уља на изласку из хладњака $\vartheta_{hu} = 83$°C, и температура амбијента 20°C? Сматрати да су параметри уља и ваздуха исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру. (2,5п)

1. Задатак

Вектор површинске густине снаге провођења у сферном координатном систему одређује се као

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot grad\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{\iota}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \vec{\iota}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \vec{\iota}_\varphi \right) \tag{1.1}$$

Због симетрије, температура је константна на свакој од угаоних координата:

$$\vartheta = \vartheta(r) = const(\theta, \varphi), \tag{1.2}$$

одакле се добија

$$\vec{q}_s = q_S(r) \cdot \vec{\iota}_r = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{\iota}_r \tag{1.3}$$

У стационарном стању флукс вектора површинске густине снаге кроз сферну површ пречника r је константна за било које r ∈ [r_u, r_s] од центра и представља снагу (q) која се преноси од унутрашње ка спољашњој површи љуске. Ова снага је иста кроз сваку тако формирану површ, зато што се у љусци не генерише топлота.

$$q = \iint_S \vec{q}_S \cdot d\vec{S} \tag{1.4}$$

$$q = \iint_S q_S \cdot \vec{\iota}_r \cdot \vec{\iota}_r \cdot dS = \iint_S q_S \cdot dS \tag{1.5}$$

$$q = q_s(r) \cdot \iint_S dS = q_S(r) \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \tag{1.6}$$

Заменом (1.3) у (1.6) се добија:

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \tag{1.7}$$

чијим решавањем се може одредити расподела температуре дуж радијалног правца:

$$d\vartheta = -\frac{q}{\lambda \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi} \cdot dr \tag{1.8}$$

Интеграцијом од унутрашње до спољашње површи сферне љуске добија се:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{2}{D_u} - \frac{2}{D_s} \right) \tag{1.9}$$

Израз (1.9) се може трансформисати у

$$\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{q} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{D_u} - \frac{1}{D_s} \right), \tag{1.10}$$

чиме се добија вредност топлотног отпора која је једнака односу разлике температура и снаге пренеоса топлоте провођењем од унутрашње до дпољашње површи љуске:

$$R^T_{ljuske} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{q} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{D_u} - \frac{1}{D_s} \right) \tag{1.11}$$

2. Задатак

Целокупна топлотна енергија генерисана у цеви се преноси ка уљу и изазива пораст његове температуре дуж правца струјања (у смеру осе x), па важи:

$$P'x = \rho c_p Q(\vartheta^{ulja}(x) - \vartheta_{ul}) \tag{2.1}$$

$$Q = vS = v\pi \frac{d^2}{4} = 0{,}1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}05^2}{4} = 0{,}00019635\, m^3/s \tag{2.2}$$

Сада је потребно одредити везу између температуре уља($\vartheta^{ulja}(x)$) и температуре цеви ($\vartheta^{cevi}(x)$). За део цеви елементарне дужине dx на одстојању x од почетка, може се написати следећи израз:

$$P'dx = \alpha \cdot d \cdot \pi \cdot dx \cdot \left(\vartheta^{cevi}(x) - \vartheta^{ulja}(x) \right) \tag{2.3}$$

Одавде добијамо израз за промену температуре цеви:

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta^{ulja}(x) + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \tag{2.4}$$

Услов који је потребно испунити је да максимална температура цеви, која се достиже на самом крају цеви (x=L), буде мања од ϑ_{max}^{cevi}=80°C. За (x=L), израз (2.4) постаје

$$\vartheta^{cevi}(x = L) = \vartheta^{cevi}_{max} = \vartheta^{ulja}(x = L) + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \tag{2.5}$$

Из (2.5) добија се температура уља на изласку из цеви ϑ_{izl} = $\vartheta^{ulja}(x)$:

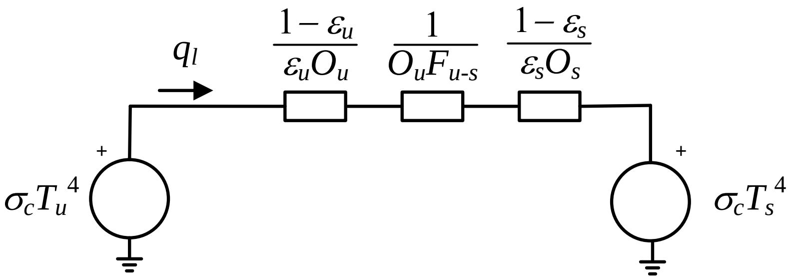
$$\vartheta_{izl} = \vartheta^{cevi}_{max} - \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \tag{2.6}$$

Заменом израза (2.6) у једначину (2.1), написану за (x=L), а затим решавањем једначине по ϑ_{izl}, добија се тражена температура уља на уласку:

$$\vartheta_{ul} = \vartheta_{izl} - \frac{P'L}{\rho c_p Q} = \vartheta_{max}^{cevi} - \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} - \frac{P'L}{\rho c_p Q} = 43{,}65°\mathrm{C} \tag{2.7}$$

3. Задатак

У случају да екран није постављен, размена енергије зрачењем између површи унутрашње и спољашње цеви може се анализирати на основу следеће радијационе шеме (слика 3.1):



Слика 3.1

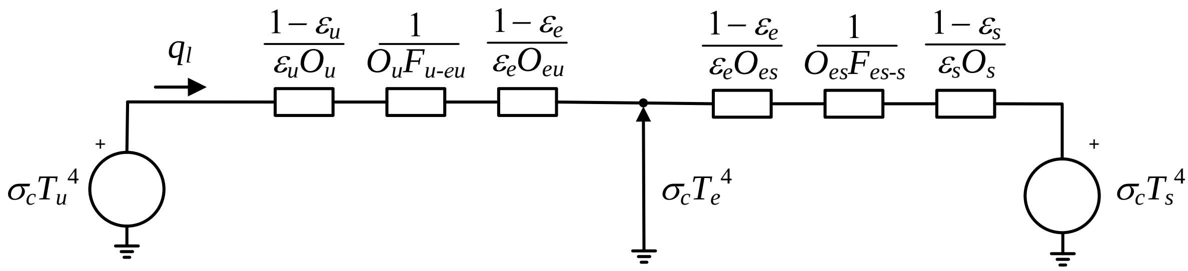
Пошто целокупна енергија емитована са површи унутрашње цеви доспева на површ спољашње, на основу дефиниције фактора виђења закључује се да је $F_{u\text{-}s}$ = 1.

На основу радијационе шеме (слика 3.1) може се израчунати укупна подужна енергија која се размењује између унутрашње и спољашње цеви:

$$q_l = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_s^4)}{\frac{1-\varepsilon_u}{O_u \varepsilon_u} + \frac{1}{O_u F_{u-s}} +} \tag{3.1}$$

где је $O_u = D_u \pi$ и $O_s = D_S \pi$. Решавањем једначине (3.1) добија се тражена температура унутрашње површи спољашње цеви ϑ_s = 763,73°C.

Након постављања екрана, енергија се зрачењем преноси између спољашње површи унутрашње цеви и унутрашње површи екрана и између спољашње површи екрана и унутрашње површи спољашње цеви. Радијациона шема за овај случај приказана је на слици 3.2. Пошто сва енергија емитована са спољашње површи унутрашње цеви доспева на унутрашњу површ екрана, закључује се да је $F_{u\text{-}eu}$ = 1. Екран је танак и отпор преносу топлоте између унутрашње и спољашње површи екрана је занемарљиво мали. Због тога се може сматрати да су температуре спољне и унутрашње површи екрана приближно једнаке. Такође, целокупна енергија емитована са спољашње површи екрана доспева до унутрашње површи спољашње цеви, па важи $F_{es\text{-}s}$ = 1.



Слика 3.2

Снага која се размењује између унутрашње и спољашње цеви по јединици дужине износи:

$$q_l = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_s^4)}{\frac{1-\varepsilon_u}{\varepsilon_u O_u} + \frac{1}{O_u F_{u-eu}} + \frac{1-\varepsilon_e}{\varepsilon_e O_{eu}} + \frac{1-\varepsilon_e}{\varepsilon_e O_{su}} + \frac{1}{O_{es} F_{u-es}} + \frac{1-\varepsilon_s}{O_s \varepsilon_s}} \tag{3.2}$$

где је $O_{eu} = D_{eu}\pi$ и $O_{es} = D_{es}\pi$. Решавањем једначине (3.2) добија се тражена температура унутрашње површи спољашње цеви након постављања екрана ϑ_s = 541,17°C

4. Задатак

Због симетрије, могуће је посматрати само једну половину ребра, односно прорачун се своди на „стандардни“ случај ребра које је само једним базисом ослоњено на тело, док је површ другог базиса адијабатса. Укупна снага која се преко ребра одводи ка амбијенту једнака је двострукој вредности снаге која се одводи са ребра дужине једнаке половини стване дужине ребра, познате температуре једног базиса и адијабадског другог базиса. Диференцијална једначина која описује промену температуре дуж ребра у устаљеном добија се на следећи начин:

$$q_s = -\lambda \, grad \, \vartheta \tag{4.1}$$

$$q_{sx} = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \tag{4.2}$$

$$q(x) = -\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d\vartheta}{dx} \tag{4.3}$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \tag{4.4}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha(\vartheta(x) - \vartheta_a)D\pi dx \tag{4.5}$$

$$dq_\alpha(x) = -dq(x) \tag{4.6}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{4\alpha}{\lambda D}(\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.7}$$

Опште решење диференцијалне једначине:

$$\vartheta(x) = C_1 \cdot e^{m\cdot x} + C_2 \cdot e^{-m\cdot x} + \vartheta_a \tag{4.8}$$

где је

$$m = \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda D}} \tag{4.9}$$

Интеграционе константе које фигуришу у општем решењу одређују се из граничних услова за базисе ребра:

1. За базис ослоњен на тело температуре ϑ_b:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_b \tag{4.10}$$

2. За базис који се налази на равни симетрије:

$$\frac{d\vartheta}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 \tag{4.11}$$

Заменом општег решења диференцијалне једначине у изразе за граничне услове добија се систем једначина

$$C_1 + C_2 + \vartheta_a = \vartheta \tag{4.12}$$

$$C_1 \cdot m \cdot e^{m\cdot\frac{L}{2}} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m\cdot\frac{L}{2}} = 0 \tag{4.13}$$

и њиховим решавањем по C_1 и C_2 добијају се интеграционе константе:

$$C_1 = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} \tag{4.14}$$

$$C_2 = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} e^{mL} \tag{4.15}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} e^{mx} + \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} e^{mL} e^{-mx} + \vartheta_a = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} (e^{mx} - e^{mL-mx}) + \vartheta_a \tag{4.16}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$\begin{aligned} q_{uk} &= 2q(x = 0) = -2\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d\vartheta}{dx}(x = 0) = -2\lambda \frac{D^2\pi}{4} \left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} m e^{m0} - \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} e^{mL} m e^{-m0}\right) \\ &= -\lambda \frac{D^2\pi}{2} \cdot \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{mL}} m(1 - e^{mL}) \end{aligned} \tag{4.17}$$

<u>5. Задатак</u>

На основу извођења са часова предавања број 4 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_p S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{5.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 31{,}35°\text{C} \tag{5.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 62°\text{C} \tag{5.3}$$

Заменом ових вредности у израз (5.1), уз P_{hn} = 210 kW добија се да је:

$$K_pS = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 4{,}672\,\frac{kW}{℃} \tag{5.4}$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv}(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{5.5}$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu}(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{5.6}$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn})Q_{vn}} = 0{,}3024\,\frac{J}{m^3K} \tag{5.7}$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun})Q_{un}} = 1822{,}5651\,\frac{J}{m^3K} \tag{5.8}$$

У посматраној радној тачки хладњака имамо да је проток уља смањен 20% $Q_u = 0{,}8Q_{un} = 0{,}01511$ m^3/s. Температура топлог уља опала је на $\vartheta_{tu} = 90$℃, док је температура хладног уља $\vartheta_{tu} = 83$℃. За уље се сада може написати израз аналоган изразу (5.6) из којег је могуће одредити расхладну снагу:

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) = 192{,}79\ kW \tag{5.9}$$

Проток ваздуха једнак је номиналном $Q_v = Q_{vn}$, док температура хладног ваздуха $\vartheta_{hv} = 20$°C. За снагу хлађења, одређену у изразу (5.9) и овај проток можемо написати израз аналоган изразу (5.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{5.10}$$

На основу израза (5.10) долазимо до:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 42{,}54℃ \tag{5.11}$$

За снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (5.1):

$$P_h = \frac{K_p^z S(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}}\right)} \tag{5.12}$$

Из претходног израза се добија

$$K_p^z S = \frac{P_h \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 3{,}897\,\frac{kW}{℃}, \tag{5.13}$$

односно

$$\frac{K_p^z S}{K_p\, S} = \frac{K_p^z}{K_p} = \frac{3{,}897}{4{,}672} = 0{,}834 \tag{5.14}$$

Дакле, услед запрљања дошло је до смањења укупног коефицијента преноса топлоте за 16,6%.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

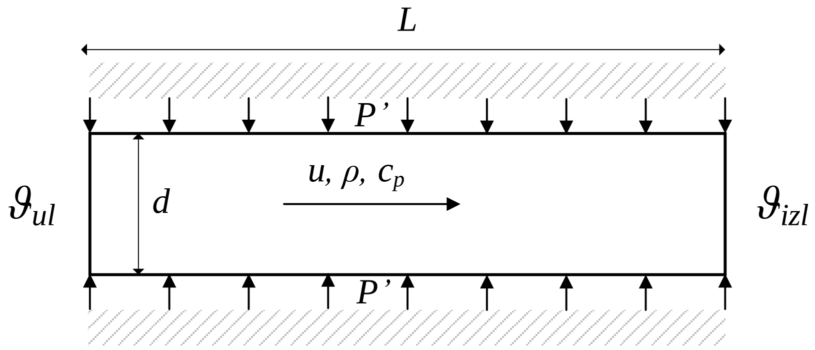
Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 2. 7. 2022.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Термоакумулациона (ТА) пећ, инсталисане снаге P_n = 5 kW, користи се за загревање једне просторије. Пећ ради у циклусима од 24 часа. Грејач се укључује на почетку циклуса (0:00h), а искључује се након што пораст температуре изотермичког језгра пећи (шамотно језгро и грејач) достигне θ_{max} = 700 K и остаје искључен до поноћи (24:00h). Снага којом се енергија троши, издувавањем ваздуха из пећи, је константна током целог циклуса и износи P_z = 1,2 kW. Колико времена ће грејач бити укључен током једног дана? Познате су вредности топлотног капацитета изотермичког језгра пећи $C^T = 1{,}6 \cdot 10^5$ J/K и топлотног отпора преносу топлоте од изотермичког језгра до амбијента R^T = 3,5 K/W. Снагу преноса топлоте кроз топлотну изолацију пећи одредити на основу средње вредности пораста температуре изотермичког језгра у току једног циклуса. Сматрати да пећ ради у квазистационарном режиму, тако да је температура изотермичког језгра на почетку и на крају циклуса (у поноћ претходног и текућег дана) једнака. (2,5п)

2. Кроз цев која дужине L = 5 m и унутрашњег пречника d = 5 cm, протиче уље брзином u = 10 cm/s. Уље се загрева помоћу грејача, који је са друге стране идеално топлотно изолован, подужном снагом P' = 400 W/m. При решавању задатка претпоставити да вредности параметара уља не зависе од температуре уља и да густина уља износи ρ = 980 kg/m^3, а специфични топлотни капацитет c_p= 2300 J/kgK. Локална вредност коефицијента преласка топлоте струјањем са уља на зид цеви на локацији x (и њеној инфинитезималној околини) од уласка уља је одређен изразом $\alpha(x) = \frac{\lambda\left(0{,}332\cdot\left(\frac{u(x+0{,}25)}{\nu}\right)^{1/2}\cdot Pr^{1/3}\right)}{x+0{,}25}$ и да његова вредност на уласку у цев износи α_0 = 200 W/(m^{2}K). Колико износи максимална температура уља на уласку у цев при којој температура грејача (цеви) неће прећи ϑ_{max}^{cevi}=80°C. (2п)



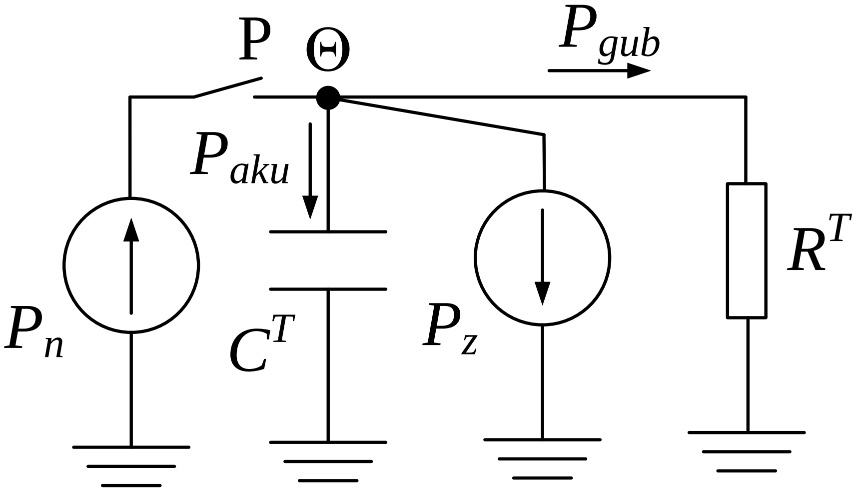
3. Цев пречника D_u = 5 cm, емисивности ε_u = 0,8 и температуре ϑ_u = 800°C се налази унутар спољне цеви унутрашњег пречника D_s = 8 cm емисивности ε_s = 0,7. По обиму унутрашње цеви се генерише топлота подужне снаге q_l = 1000 W/m. Колико износи температура унутрашње површ спољашње цеви у наведеним случају и у случају да се између две цеви стави трећа, од материјала специфичне топлотне проводности λ = 30 W/(mK), унутрашњег пречника D_{eu} = 6,5 cm, спољашњег пречника D_{es} = 7 cm и емисивности обе стране ε_e = 0,2? (2п)

4. Написати диференцијалну једначину и граничне услове који описују промену температуре дуж ребра за хлађење. Претпостављајући да је ова једначина решена, односно да је добијен израз за промену температуре дуж ребра ($\vartheta(x)$), написати израз за снагу која се са ребра преноси ка амбијенту температуре ϑ_a. Коефицијент преласка топлоте са ребра на ваздух зависи од разлике температура ребра и амбијента као $\alpha(\theta) = \alpha_0 \cdot (\theta / 20)^{0,25}$, где је α_0 позната константа. Ребро је кружног попречног пресека пречника D и дужине L. Топлотна проводности материјала од кога је сачињено ребро износи λ. Базис ребра је ослоњен на тело температуре ϑ_b. (2,5п)

5. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља: ϑ_{tun} = 102°C и ϑ_{hun} = 95,9°C, температуре хладног и топлог ваздуха: ϑ_{hvn} = 40°C и ϑ_{tvn} = 64,55°C, номинална снага P_{hn} = 210 kW. Током рада хладњака, услед запрљања, коефицијент преноса топлоте хладњака се смањи за 30%. Протоци уља и ваздуха се не мењају током рада хладњака. Температуре уља и ваздуха на уласку у хладњак једнаке су номиналним. Колика је расхладна сага у овом радном режиму? Сматрати да су параметри уља и ваздуха исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у супротним смеровима. (2п)

1. Задатак

Топлотна шема која описује процес загревања пећи приказана је на слици 1.1.



Слика 1.1.

Прекидач P је затворен током периода загревања пећи, док је у остатку циклуса отворен.
На почетку циклуса (0:00h) пораст температуре изотермичког језгра је θ_x, у том тренутку грејач се укључује и остаје укључен x секунди. У тренутку искључења грејача пораст температуре изотермичког језгра је θ_{max} = 700 K. Након тог тренутка, до краја посматраног циклуса (24·3600 – x секунди), температура језгра опада тако да је на крају циклуса (24:00 h) пораст температуре поново једнак θ_x.
Током периода хлађења језгра, енергија акумулисана у њему се постепено одаје амбијенту укупном снагом $P_z + P_{gub}$. Енергија која се током овог периода преда амбијенту је

$$E = C^T(\theta_{max} - \theta_x) = \left(P_z + P_{gub}\right)(86400 - x) \tag{1.1}$$

где је

$$P_{gub} = \frac{\dfrac{\theta_{max} + \theta_x}{2}}{R^T} = \frac{\theta_{max} + \theta_x}{2R^T} \tag{1.2}$$

Енергија које се „потроши“ у периоду хлађења, израз (1.1), мора да се надокнади у периоду загревања, па важи

$$E = C^T(\theta_{max} - \theta_x) = \left(P_n - P_z - P_{gub}\right)x \tag{1.3}$$

Из једначине (1.3) могуће је изразити време загревања

$$x = \frac{C^T(\theta_{max} - \theta_x)}{P_n - P_z - P_{gub}} \tag{1.4}$$

Заменом (1.4) у (1.1) добија се једначина

$$C^T(\theta_{max} - \theta_x) = \left(P_z + \frac{\theta_{max} + \theta_x}{2R^T}\right)\left(86400 - \frac{C^T(\theta_{max} - \theta_x)}{P_n - P_z - \dfrac{\theta_{max} + \theta_x}{2R^T}}\right) \tag{1.5}$$

чијим се решавањем добија вредност пораста температуре језгра у поноћ θ_x = 174,14 K. Заменом ове вредности у (1.4) добија се тражено време рада грејача x = 22894s = 6,36h.

2. Задатак

Целокупна топлотна енергија генерисана у цеви се преноси ка уљу и изазива пораст његове температуре дуж правца струјања (у смеру осе x), па важи:

$$P'x = \rho c_p Q(\vartheta^{ulja}(x) - \vartheta_{ul}) \tag{2.1}$$

$$Q = vS = v\pi\frac{d^2}{4} = 0{,}1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}05^2}{4} = 0{,}00019635\, m^3/s \tag{2.2}$$

Сада је потребно одредити везу између температуре уља($\vartheta^{ulja}(x)$) и температуре цеви ($\vartheta^{cevi}(x)$). За део цеви елементарне дужине dx на одстојању x од почетка, може се написати следећи израз:

$$P'dx = \alpha(x) \cdot d \cdot \pi \cdot dx \cdot \left(\vartheta^{cevi}(x) - \vartheta^{ulja}(x)\right) \tag{2.3}$$

Одавде добијамо израз за промену температуре цеви:

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta^{ulja}(x) + \frac{P'}{\alpha(x) \cdot d \cdot \pi} \tag{2.4}$$

Коефицијент преласка топлоте струјањем се мења као

$$\alpha(x) = \frac{\lambda\left(0{,}332\cdot\left(\frac{u(x+0{,}25)}{\nu}\right)^{1/2}\cdot Pr^{1/3}\right)}{x+0{,}25} = C\frac{1}{(x+0{,}25)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.5}$$

Вредност константе C се може одредити из познате вредности α_0 = 200 W/(m^{2}K)

$$\alpha_0 = \alpha(x=0) = \frac{C}{0{,}25^{\frac{1}{2}}} \tag{2.6}$$

Дакле, важи

$$\alpha(x) = \frac{\alpha_0\cdot 0{,}25^{\frac{1}{2}}}{(x+0{,}25)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.7}$$

Заменом (2.7) у (2.4) добија се

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta^{ulja}(x) + \frac{P'\cdot(x+0{,}25)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_0\cdot 0{,}25^{\frac{1}{2}}\cdot d\cdot\pi} + \tag{2.8}$$

Услов који је потребно испунити је да максимална температура цеви, која се достиже на самом крају цеви ($x = L$), буде мања од ϑ_{max}^{cevi} = 80°C. За ($x = L$), израз (2.8) постаје

$$\vartheta^{cevi}(x=L) = \vartheta^{cevi}_{max} = \vartheta^{ulja}(x=L) + \frac{P'\cdot(L+0{,}25)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_0\cdot 0{,}25^{\frac{1}{2}}\cdot d\cdot\pi} \tag{2.9}$$

Из (2.9) добија се температура уља на изласку из цеви $\vartheta_{izl} = \vartheta^{ulja}(x = L)$:

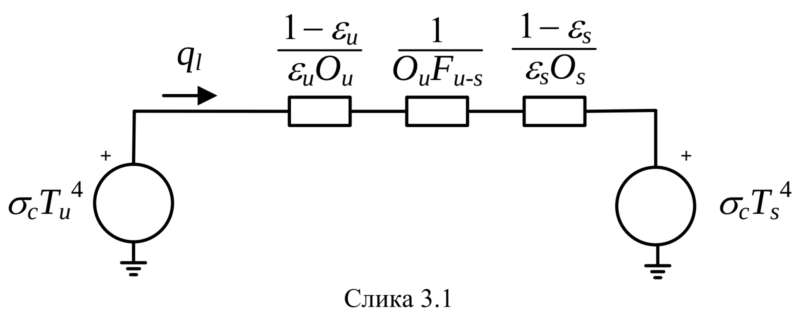
$$\vartheta_{izl} = \vartheta^{cevi}_{max} - \frac{P'\cdot(L+0{,}25)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_0\cdot 0{,}25^{\frac{1}{2}}\cdot d\cdot\pi} \tag{2.10}$$

Заменом израза (2.10) у једначину (2.1), написану за ($x = L$), а затим решавањем једначине по ϑ_{ul}, добија се тражена температура уља на уласку:

$$\vartheta_{ul} = \vartheta_{izl} - \frac{P'L}{\rho c_p Q} = \vartheta^{cevi}_{max} - \frac{P'\cdot(L+0{,}25)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_0\cdot 0{,}25^{\frac{1}{2}}\cdot d\cdot\pi} - \frac{P'L}{\rho c_p Q} = 17{,}13℃ \tag{2.7}$$

<u>3. Задатак</u>

У случају да екран није постављен, размена енергије зрачењем између површи унутрашње и спољашње цеви може се анализирати на основу следеће радијационе шеме (слика 3.1):



Слика 3.1

Пошто целокупна енергија емитована са површи унутрашње цеви доспева на површ спољашње, на основу дефиниције фактора виђења закључује се да је $F_{u\text{-}s} = 1$.

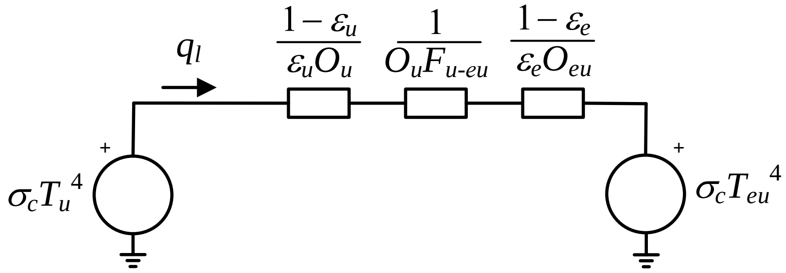
На основу радијационе шеме (слика 3.1) може се израчунати укупна подужна енергија која се размењује између унутрашње и спољашње цеви:

$$q_l = \frac{\sigma_c(T_u^4 - T_s^4)}{\frac{1-\varepsilon_u}{O_u\varepsilon_u} + \frac{1}{O_u F_{u-s}} + \frac{1-\varepsilon_s}{O_s\varepsilon_s}} \tag{3.1}$$

где је $O_u = D_u\pi$ и $O_s = D_S\pi$. Решавањем једначине (3.1) добија се тражена температура унутрашње површи спољашње цеви ϑ_s = 763,73℃.

Након постављања екрана, енергија се зрачењем преноси између спољашње површи унутрашње цеви и унутрашње површи екрана, затим провођењем кроз екран и, на крају, зрачењем између спољашње површи екрана и унутрашње површи спољашње цеви.

Радијациона шема за пренос топлоте са унутрашње цеви на екран приказана је на слици 3.2. Пошто сва енергија емитована са спољашње површи унутрашње цеви доспева на унутрашњу површ екрана, закључује се да је $F_{u\text{-}eu} = 1$.



Слике 3.2.

На основу радијационе шеме (слика 3.2) може се израчунати укупна подужна енергија која се размењује између унутрашње цеви и унутрашње површи екрана:

$$q_l = \frac{\sigma_c(T_u^4 - T_{eu}^4)}{\dfrac{1-\varepsilon_u}{\varepsilon_u O_u} + \dfrac{1}{O_u F_{u-eu}} + \dfrac{1-\varepsilon_e}{\varepsilon_e O_{eu}}} \tag{3.2}$$

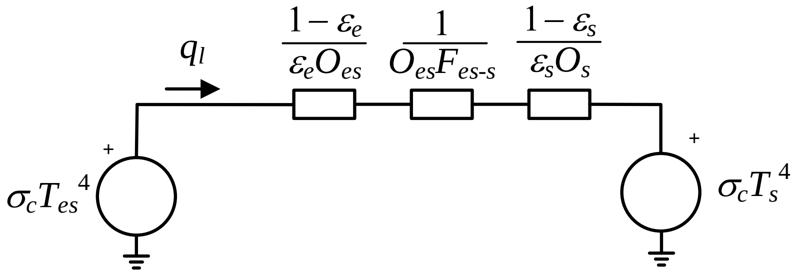
где је $O_{eu} = D_{eu}\pi$. Решавањем једначине (3.2) добија се тражена температура унутрашње површи екрана ϑ_{eu} = 684,33°C.

Снага (q_l) која стигне до унутрашње површи екрана се провођењем преноси до његове спољашње површи. Пад температуре између унутрашње и спољашње површи екран одређује се из једначине

$$q_l = \frac{\vartheta_{eu} - \vartheta_{es}}{R^T} = \frac{\vartheta_{eu} - \vartheta_{es}}{\dfrac{1}{2\pi\lambda}\ln(\dfrac{D_{es}}{D_{eu}})} \tag{3.3}$$

$$\vartheta_{es} = \vartheta_{eu} - q_l \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\left(\frac{D_{es}}{D_{eu}}\right) = 683{,}94℃ \tag{3.5}$$

Радијациона шема за пренос топлоте са спољашње површи екрана на унутрашњу површ спољашње цеви приказана је на слици 3.3. Целокупна енергија емитована са спољашње површи екрана доспева до унутрашње површи спољашње цеви, па важи $F_{es\text{-}s} = 1$.



Слика 3.3.

На основу радијационе шеме (слика 3.3) може се израчунати укупна подужна енергија која се размењује између спољашње површи екрана и унутрашње површи спољашње цеви:

$$q_l = \frac{\sigma_c(T_{es}^4 - T_s^4)}{\dfrac{1-\varepsilon_e}{\varepsilon_e O_{su}} + \dfrac{1}{O_{es} F_{u-es}} + \dfrac{1-\varepsilon_s}{O_s \varepsilon_s}} \tag{3.6}$$

где је $O_{es} = D_{es}\pi$. Решавањем једначине (3.6) добија се тражена температура унутрашње површи спољашње цеви ϑ_{eu} = 526,08°C.

<u>4. Задатак</u>

Диференцијална једначина која описује промену температуре дуж ребра у устаљеном добија се на следећи начин:

$$q_s = -\lambda\ grad\ \vartheta \tag{4.1}$$

$$q_{sx} = -\lambda\ \frac{d\vartheta}{dx} \tag{4.2}$$

$$q(x) = -\lambda \frac{D^2\pi}{4}\ \frac{d\vartheta}{dx} \tag{4.3}$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\lambda \frac{D^2\pi}{4}\ \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \tag{4.4}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha(\vartheta(x)) \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a)D\pi dx \tag{4.5}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha_0 \frac{(\vartheta(x) - \vartheta_a)^{0,25}}{20^{0,25}}(\vartheta(x) - \vartheta_a)D\pi dx = \alpha_0 \frac{(\vartheta(x) - \vartheta_a)^{1,25}}{20^{0,25}} D\pi dx \tag{4.6}$$

$$dq_\alpha(x) = -dq(x) \tag{4.7}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{4\alpha_0}{20^{0,25}\lambda D}(\vartheta(x) - \vartheta_a)^{1,25} \tag{4.8}$$

Гранични услови за базисе ребра:

1. За базис ослоњен на тело температуре ϑ_b:

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_b \tag{4.9}$$

2. За базис који се хлади ваздухом температуре ϑ_a:

$$-\frac{d\vartheta}{dx}(x=L) = \alpha_0\frac{(\vartheta(x=L) - \vartheta_a)^{1,25}}{20^{0,25}} \tag{4.10}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$q_{uk} = -\frac{D^2\pi}{4}\lambda\frac{d\vartheta}{dx}(x=0) \tag{4.11}$$

5. Задатак

На основу извођења са часова предавања број 4 (изрази 185 до 195) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_{pn}S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_{pn}S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{5.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{hvn} = 55{,}9℃ \tag{5.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{tvn} = 37{,}45℃ \tag{5.3}$$

Заменом ових вредности у израз (5.1), уз P_{hn} = 210 kW добија се да је:

$$K_{pn}S = \frac{P_{hn}\cdot\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 4{,}5592\,\frac{kW}{℃} \tag{5.4}$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv}(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{5.5}$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu}(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{5.6}$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v Q_{vn} c_{pv} = \frac{P_{hn}}{(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn})} = 8{,}5540\,\frac{kW}{K} \tag{5.7}$$

$$\rho_u Q_{un} c_{pu} = \frac{P_{hn}}{(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun})} = 34{,}4262\,\frac{kW}{K} \tag{5.8}$$

У посматраној радној тачки хладњака имамо да је коефицијент преноса топлоте опао за 30% K_pS = $0{,}7K_{pn}S$ = 3,1914 kW/℃. Температура топлог уља једнака је номиналној ϑ_{tu} = 102℃ и температура хладног ваздуха једнака је номиналној ϑ_{hv} = 40℃. Протоци уваља и ваздуха су, такође, једнаки номиналним $Q_u = Q_{un}$ и $Q_v = Q_{vn}$. За уље и ваздух се сада могу написати изрази аналоган изразима (5.6) и (5.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{5.9}$$

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \tag{5.10}$$

из којих је могуће изразити непознате температуре

$$\vartheta_{tv} = \vartheta_{hv} + \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} \tag{5.11}$$

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} \tag{5.12}$$

За снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (5.1):

$$P_h = \frac{K_pS(\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{tv})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}}\right)} \tag{5.13}$$

Заменом израза (5.11) и (5.12) у (5.13) добија се једначина, чијим се решавањем може одредити расхладна снага:

$$P_h = \frac{K_p S \left(\vartheta_{tu} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - \vartheta_{hv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv} + \dfrac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} \right)}{\ln \left(\dfrac{\vartheta_{tu} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \dfrac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}}} \right)} \tag{5.14}$$

$$P_h = \frac{K_p S \left(- \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} + \dfrac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} \right)}{\ln \left(\dfrac{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \dfrac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}}} \right)} \tag{5.15}$$

Расхладна снага у посматраном радном стању је P_h = 159,64 kW. Сада је из једначина (5.11) и (5.12) могуће одредити и преостале две непознате температуре ϑ_{hu} = 97,36°C и ϑ_{tv} = 58,66°C.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

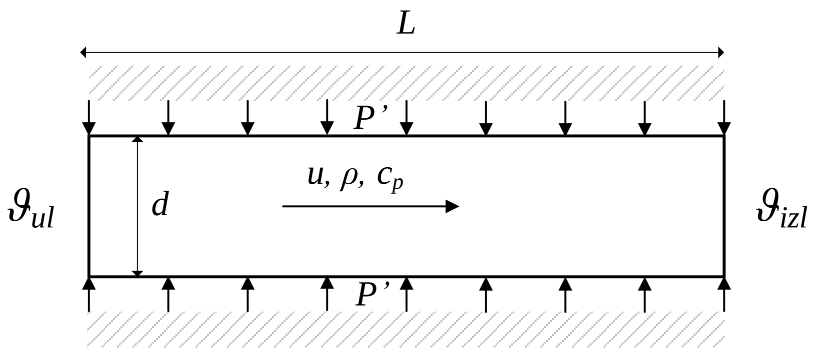
Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 27. 8. 2022.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић
Сваки задатак носи по 2 поена.

1. Посматрајмо просторију димензија a x b = 5 m x 4 m, висине h = 2,5 m. Температуру просторије је потребно загревањем одржавати на 20°C. Изнад и испод просторије, као и поред једног од два дужа зида се налазе загревани простори чија је температура 20°C. Одредити снагу загревања за два случаја: а) када је температура амбијента 5°C и када нема ветра, б) када је температура амбијента -10°C и када су спољне површи изложене ветру. Просторија је изолована материјалом специфичне топлотне проводности λ = 0,03 (W/(m·K)), дебљине d = 5 cm. Коефицијент преласка топлоте струјањем на унутрашњој страни и на спољашњој страни када нема ветра износи α_p = 5 (W/(m^2·K)), а на спољашњој страни када је она изложена ветру α_v = 20 (W/(m^2·K)).

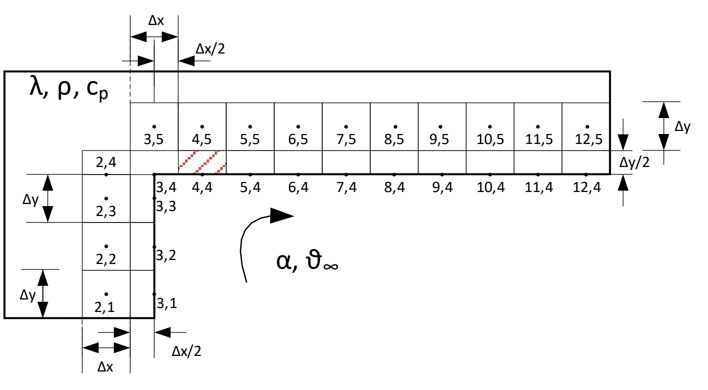
2. Кроз цев дужине L = 5 m и унутрашњег пречника d = 5 cm, протиче уље брзином u = 10 cm/s. Уље се загрева помоћу грејача, који је са друге стране идеално топлотно изолован, подужном снагом P' = 400 W/m. При решавању задатка претпоставити да вредности параметара уља не зависе од температуре уља и да густина уља износи ρ = 980 kg/m^3, а специфични топлотни капацитет c_p= 2300 J/kgK. Коефицијент преласка топлоте струјањем са уља на зид цеви је једнак α = 80 W/(m^{2}K). Колико износи максимална температура уља на уласку у цев при којој средња температура грејача (цеви) неће прећи ϑ_{sr}^{cevi} = 60°C.



3. Раван хомоген зид сачињен од гвожђа дебљине δ_{Fe} = 8 mm загрева се услед генерисања топлоте по запремини снагом чија се запреминска густина мења на начин: $q_v(x)$=q_{v0}·e$^{-x/\delta}$ (q_{v0} = 200·10^3 W/m^3, δ = 5 mm). Са унутрашње стране зида нанет је слој фарбе дебљине δ_{fu} = 0,1 mm, а са спољашње слој цинка дебљине δ_{Zn} = 0,08 mm и фарбе дебљине δ_{fs} = 0,15 mm. Специфична топлотна проводност фарбе износи λ_f = 0,2 W/(mK) и много је мања од вредности за гвожђе и цинк. Одредити температуру површи унутрашње стране зида која је у додиру са уљем. Коефицијент преласка топлоте струјањем према уљу температуре ϑ_u = 70°C износи α_u = 65 W/(m^{2}K), а према амбијенталном ваздуху температуре ϑ_a = 20°C износи α_a = 5 W/(m$_2$K).

4. Ребром за хлађење потребно је са тела одвести снагу губитака од P_g = 3 W. Једно ребро је дужине L = 100 mm и попречног пресека облика правоугаоника a x b = 50 mm x 10 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре ϑ_a = 30°C износи α = 8 W/m^{2}K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи λ = 237 W/mK. Између тела које се хлади и ребра постоји контактна отпорност $R_{th,c}$ = 1 K/W. Одредити температуру површине тела које се хлади. При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси ка ваздуху једнака нули.

5. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (4,4). При постављању израза који обухвата и временску промењивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотна проводност материјала је λ, специфични топлотни капацитет је c_p, густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је α. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем.



1. Задатак

Снага загревања просторије једнака је снази која се, кроз три зида (два краћа и један дужи), одводи ка амбијенту:

$$P_{zag} = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T} \tag{1.1}$$

где је топлотни отпор R^T једнак:

$$R^T = \left(\frac{2}{R_k^T} + \frac{1}{R_d^T}\right)^{-1} = \left(\frac{2R_d^T + R_k^T}{R_k^T R_d^T}\right)^{-1} = \frac{R_k^T R_d^T}{2R_d^T + R_k^T} \tag{1.2}$$

Топлотне отпорности зидова из (1.2) одређују се као

$$R_d^T = \frac{1}{\alpha_{un} S_d} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_d} + \frac{1}{\alpha_{sp} S_d} \tag{1.3}$$

$$R_k^T = \frac{1}{\alpha_{un} S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_{sp} S_k} \tag{1.4}$$

где је $\alpha_{un} = \alpha_p$, а α_{sp} је једнако α_p у случају под а), односно α_v у случају под б).
Заменом бројних вредности добија се:

а) ϑ_a = 5°C без ветра – R_d^T = 0,1653 K/W; R_k^T = 0,2067 K/W; R^T = 0,0636 K/W; P_{zag} = 235,89 W.
б) ϑ_a = -10°C са ветром – R_d^T = 0,1533 K/W; R_k^T = 0,1917 K/W; R^T = 0,0590 K/W; P_{zag} = 508,70 W.

2. Задатак

Целокупна топлотна енергија генерисана у цеви се преноси ка уљу и изазива пораст његове температуре дуж правца струјања (у смеру осе x), па важи:

$$P'x = \rho c_p Q(\vartheta^{ulja}(x) - \vartheta_{ul}) \tag{2.1}$$

$$Q = vS = v\pi\frac{d^2}{4} = 0{,}1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}05^2}{4} = 0{,}00019635\, m^3/s \tag{2.2}$$

$$\vartheta^{ulja}(x) = \vartheta_{ul} + \frac{P'x}{\rho c_p Q} \tag{2.3}$$

Сада је потребно одредити везу између температуре уља($\vartheta^{ulja}(x)$) и температуре цеви ($\vartheta^{cevi}(x)$). За део цеви елементарне дужине dx на одстојању x од почетка, може се написати следећи израз:

$$P'dx = \alpha \cdot d \cdot \pi \cdot dx \cdot \left(\vartheta^{cevi}(x) - \vartheta^{ulja}(x)\right) \tag{2.4}$$

Одавде добијамо израз за промену температуре цеви:

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta^{ulja}(x) + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \tag{2.5}$$

Заменом (2.3) у (2.5) добија се

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta_{ul} + \frac{P'x}{\rho c_p Q} + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \tag{2.6}$$

Пошто се температура цеви мења линеарно, средњу вредност температуре цеви могуће је одредити као

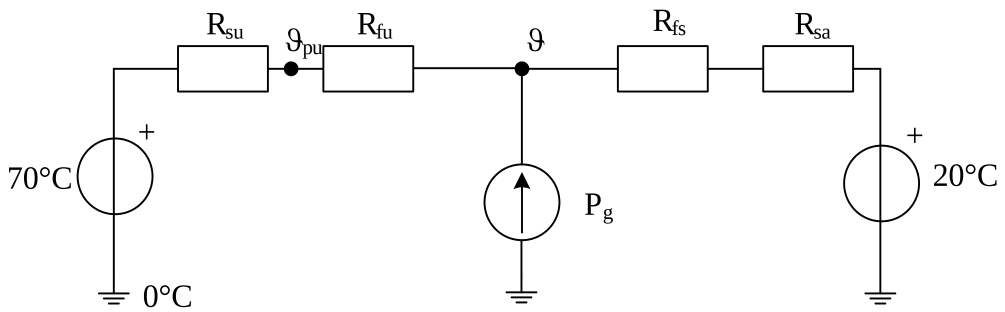
$$\vartheta_{sr}^{cevi} = \frac{\vartheta^{cevi}(x=0) + \vartheta^{cevi}(x=L)}{2} = \vartheta_{ul} + \frac{P'L}{2\rho c_p Q} + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \tag{2.7}$$

Услов који је потребно испунити је да средња температура цеви буде мања од ϑ_{sr}^{cevi} = 60°C. Тражена температура уља на уласку у цев је

$$\vartheta_{ul} = \vartheta_{sr}^{cevi} - \frac{P'L}{2\rho c_p Q} - \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} = 25{,}91°\mathrm{C} \tag{2.8}$$

3. Задатак

Одговарајућа топлотна шема приказана је на слици 3.1:



Слика 3.1

R_{fu} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз унутрашњи слој фарбе
R_{fs} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз спољашњи слој фарбе
R_{su} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка уљу
R_{sa} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка ваздуху (амбијенту)
P_g - снага генерисања топлоте у зиду (гвожђе дебљине 8 mm)
ϑ_{pu} - температура површи унутрашње стране зида

Вредности параметара топлотне шеме могу се одредити на следећи начин:

$$R_{fu} = \frac{\delta_{fu}}{\lambda_f S} = 0{,}0005/S \tag{3.1}$$

$$R_{fs} = \frac{\delta_{fs}}{\lambda_f S} = 0{,}00075/S \tag{3.2}$$

$$R_{su} = \frac{1}{\alpha_u S} = 0{,}01538/S \tag{3.3}$$

$$R_{sa} = \frac{1}{\alpha_a S} = 0{,}2/S \tag{3.4}$$

$$P_g = \int_V q_v(x)dV = \int_{x=0}^{\delta_{Fe}} q_v(x)Sdx = \int_{x=0}^{\delta_{Fe}} q_{v0}e^{-x/\delta}Sdx = q_{v0}S\delta\left(1 - e^{-\delta_{Fe}/\delta}\right) = 798{,}1 \cdot S \tag{3.5}$$

Снага губитака генерисаних у зиду се делом одводи ка уљу, а делом ка амбијенту. На основу тога може се написати следећа једначина:

$$P_g = \frac{\vartheta - \vartheta_u}{R_{fu} + R_{su}} + \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R_{fs} + R_{sa}} \tag{3.6}$$

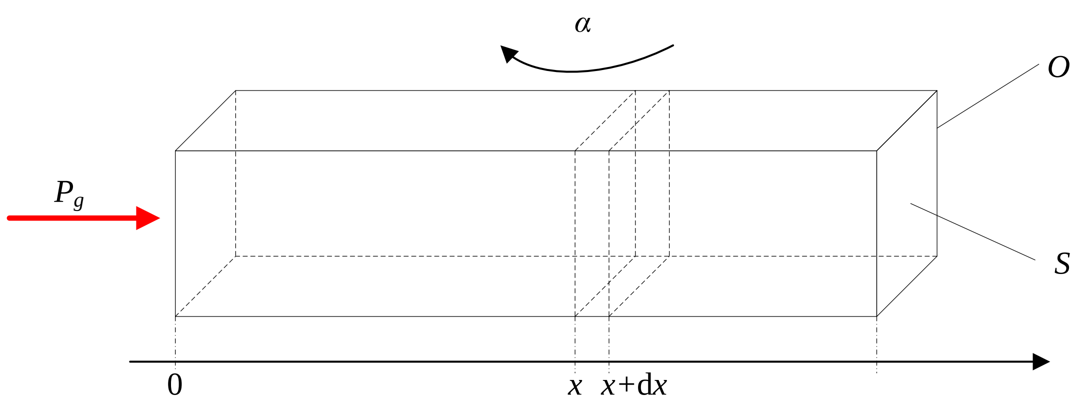
$$798{,}1 = \frac{\vartheta - 70°\text{C}}{0{,}0005 + 0{,}01538} + \frac{\vartheta - 20°\text{C}}{0{,}00075 + 0{,}2} \tag{3.7}$$

Решавањем једначине (3.7) добија се вредност температуре у средини запремине зида ϑ = 78,084°C. Температура површи зида која је у додиру са уљем је:

$$\vartheta_{pu} = \vartheta - \frac{\vartheta - \vartheta_u}{R_{fu} + R_{su}} \cdot R_{fu} = 77{,}83°\text{C} \tag{3.8}$$

4. Задатак

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине dx, на растојању x од тела на које је ребро ослоњено (слика 4.1) гласи:



Слика 4.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{4.1}$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе x (на месту x), а $dq_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине dx. Зависност снаге провођења од координате x гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{4.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати x, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{4.3}$$

Израз (4.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине dx је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.4}$$

Уврштавањем у једначину (4.1) израза за диференцијал функције (4.3) и снаге преноса топлоте струјањем (4.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент прелаcка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{4.7}$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{4.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

1. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$:

$$-\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = P_g \tag{4.9}$$

2. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{4.10}$$

На основу израза (4.7), (4.9) и (4.10) може се написати:

$$-\lambda \cdot S \cdot (C_1 m - C_2 m) = P_g \tag{4.11}$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \tag{4.12}$$

Из једначине (4.12) добија се

$$C_2 = C_1 e^{2mL} \tag{4.13}$$

Заменом (4.13) у (4.11) добија се

$$-\lambda \cdot S \cdot m \cdot (C_1 - C_1 e^{2mL}) = P_g \tag{4.14}$$

$$C_1 = \frac{P_g}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} \tag{4.15}$$

$$C_2 = \frac{P_g e^{2mL}}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} \tag{4.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{P_g}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} e^{mx} + \frac{P_g e^{2mL}}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} e^{-mx} + \vartheta_a \tag{4.16}$$

Температура базиса ребра на координати $x = 0$ је

$$\vartheta_o = \vartheta(x = 0) = \frac{P_g}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} + \frac{P_g e^{2mL}}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a = \frac{P_g (e^{2mL} + 1)}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a \tag{4.17}$$

Температура површи тела које се хлади једнака је:

$$\vartheta_p = \vartheta_o + P_g R_{th} = \frac{P_g (e^{2mL} + 1)}{\lambda S m (e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a + P_g R_{th} = 65{,}09°\mathrm{C} \tag{4.18}$$

5. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (4,4) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{5.1}$$

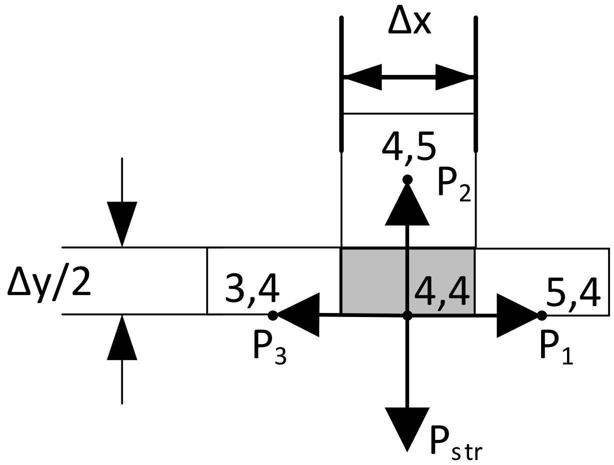
где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је $P_{gen} = 0$.

По експлицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у наредном (p + 1) тренутку у односу на тренутни (p):

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{4,4}}{dt} = \rho\, c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{4,4}^{p+1} - \vartheta_{4,4}^{p}}{\Delta t} \tag{5.2}$$



Слика 5.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{5.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 4), (4, 5) и (5,4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{3} P_k \tag{5.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{5,4}^{p}}{\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{5,4}^{p}}{\dfrac{2}{\lambda L}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{4,5}^{p}}{\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\Delta y}{L\Delta x}} \tag{5.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{3,4}^{p}}{\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\Delta x/2}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{3,4}^{p}}{\dfrac{2}{\lambda L}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.7}$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{\infty}^{p}}{\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{L\Delta x}} = \alpha L \Delta x \left(\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{\infty}^{p}\right) \tag{5.8}$$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 19. 9. 2022.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић
Сваки задатак носи по 2 поена.

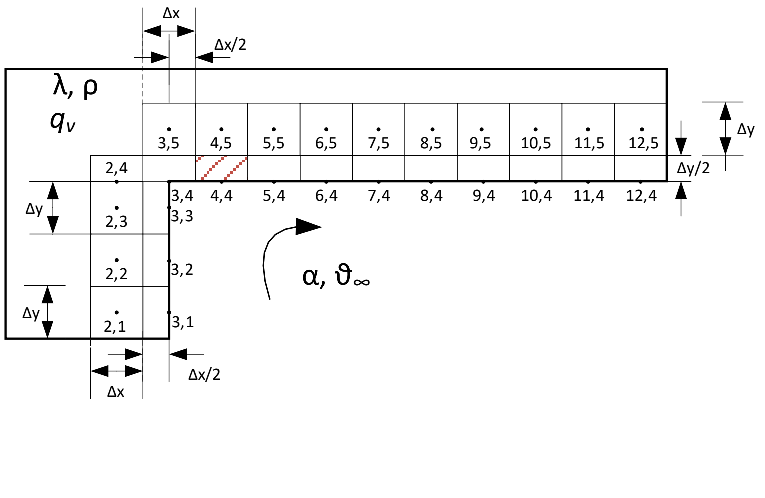
1. Посматрајмо просторију димензија a x b = 5 m x 4 m, висине h = 2,5 m. Температуру просторије је потребно загревањем одржавати на 20°C. Изнад и испод просторије, као и поред једног дужег и једног краћег зида се налазе загревани простори чија је температура 20°C. Одредити снагу загревања у случају да је температура амбијента -10°C и да је један дужи зид изложен ветру, а краћи зид није. Просторија је изолована материјалом специфичне топлотне проводности λ = 0,03 (W/(m·K)), дебљине d = 5 cm. Коефицијент преласка топлоте струјањем на унутрашњој страни и на спољашњој страни када нема ветра износи α_p = 5 (W/(m^2·K)), а на спољашњој страни када је она изложена ветру α_v = 20 (W/(m^2·K)).

2. Цев пречника D_u = 5 cm, емисивности ε_1 = 0,8 и температуре ϑ = 800°C зрачи у слободан протор температуре ϑ_a = 20°C. Колика би требала да буде температура ове површи уколико би емисивност била ε_2 = 0,2, за исту снагу одвођења топлоте са цеви?

3. Раван хомоген зид сачињен од гвожђа дебљине δ_{Fe} = 8 mm загрева се услед генерисања топлоте по запремини снагом чија се запреминска густина мења на начин: $q_v(x)=q_{v0}\cdot e^{-x/\delta}$ (q_{v0} = 80·10^3 W/m^3, δ = 5 mm). Са унутрашње стране зида нанет је слој фарбе дебљине δ_{fu} = 0,1 mm, а са спољашње слој цинка дебљине δ_{Zn} = 0,08 mm и фарбе дебљине δ_{fs} = 0,15 mm. Специфична топлотна проводност фарбе износи λ_f = 0,2 W/(mK) и много је мања од вредности за гвожђе и цинк. При којој температури уља ϑ_u неће бити никакве размене топлоте између уља и суда, односно целокупна генерисана снага бити пренета ка амбијенту? Температура ваздуха износи ϑ_a = 20°C, а коефицијент преноса топлоте са површи на ваздух α_a = 5 W/(m^{2}K).

4. Ребро за хлађење је ослољено на површ температуре ϑ_b = 62,09°C. Дужина ребра износи L = 100 mm, а његов попречни пресек је облика правоугаоника a x b = 50 mm x 10 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре ϑ_a = 30°C износи α = 8 W/m^{2}K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи λ = 237 W/mK. Одредити ефикасности ребра (η). При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси ка ваздуху једнака нули.

5. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, презентован тачком (4,4). Посматра се стационарно топлотно стање. По запремини постоји генерисања топлоте. Запреминском густином q_v. Топлотна проводност материјала је λ, густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је α. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем.



1. Задатак

Снага загревања просторије једнака је снази која се, кроз два зида (један краћи и један дужи), одводи ка амбијенту:

$$P_{zag} = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T} \tag{1.1}$$

где је топлотни отпор R^T једнак:

$$R^T = \left(\frac{1}{R_k^T} + \frac{1}{R_d^T}\right)^{-1} = \frac{R_k^T R_d^T}{R_d^T + R_k^T} \tag{1.2}$$

Топлотне отпорности зидова из (1.2) одређују се као

$$R_d^T = \frac{1}{\alpha_p S_d} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_d} + \frac{1}{\alpha_v S_d} \tag{1.3}$$

$$R_k^T = \frac{1}{\alpha_p S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_p S_k} \tag{1.4}$$

Заменом бројних вредности добија се: R_d^T = 0,1533 K/W; R_k^T = 0,2067 K/W; R^T = 0,088 K/W; P_{zag} = 340,81 W.

2. Задатак

Снага одвођења топлоте зрачењем биће једнака уколико важи

$$\sigma_c \varepsilon_1 S(T_1^4 - T_a^4) = \sigma_c \varepsilon_2 S(T_2^4 - T_a^4) \tag{2.1}$$

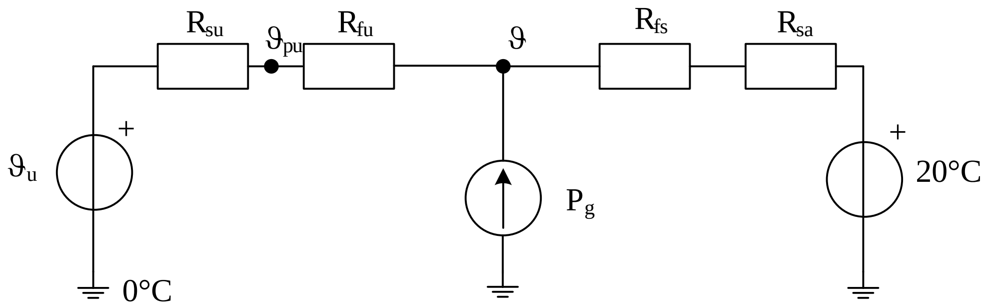
Решавањем једначине (2.1) добија се тражена температура

$$T_2 = \left(T_a^4 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(T_1^4 - T_a^4)\right)^{\frac{1}{4}} = 1516{,}08\ K \tag{2.1}$$

Односно, тражена температура површи цеви у другом случају једнака је 1242,93°C.

3. Задатак

Одговарајућа топлотна шема приказана је на слици 3.1:



Слика 3.1

R_{fu} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз унутрашњи слој фарбе
R_{fs} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз спољашњи слој фарбе
R_{su} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка уљу
R_{sa} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка ваздуху (амбијенту)
P_g - снага генерисања топлоте у зиду (гвожђе дебљине 8 mm)
ϑ - температура у средини зида
ϑ_{pu} - температура површи унутрашње стране зида
ϑ_u - температура уља

Вредности параметара топлотне шеме могу се одредити на следећи начин:

$$R_{fu} = \frac{\delta_{fu}}{\lambda_f S} = 0{,}0005/S \tag{3.1}$$

$$R_{fs} = \frac{\delta_{fs}}{\lambda_f S} = 0{,}00075/S \tag{3.2}$$

$$R_{su} = \frac{1}{\alpha_u S} = 0{,}01538/S \tag{3.3}$$

$$R_{sa} = \frac{1}{\alpha_a S} = 0{,}2/S \tag{3.4}$$

$$P_g = \int\limits_V q_v(x)dV = \int\limits_{x=0}^{\delta_{Fe}} q_v(x)Sdx = \int\limits_{x=0}^{\delta_{Fe}} q_{v0}e^{-x/\delta}Sdx = q_{v0}S\delta\left(1 - e^{-\delta_{Fe}/\delta}\right) = 319{,}24 \cdot S \tag{3.5}$$

Размене топлоте између уља и суда неће бити у граничном случају када температура уља буде једнака температури зида $\vartheta_u = \vartheta$. У том случају, лева грана шеме на слици 3.1 неће постојати, а целокупна снага губитака генерисаних у зиду ће се одводити ка амбијенту:

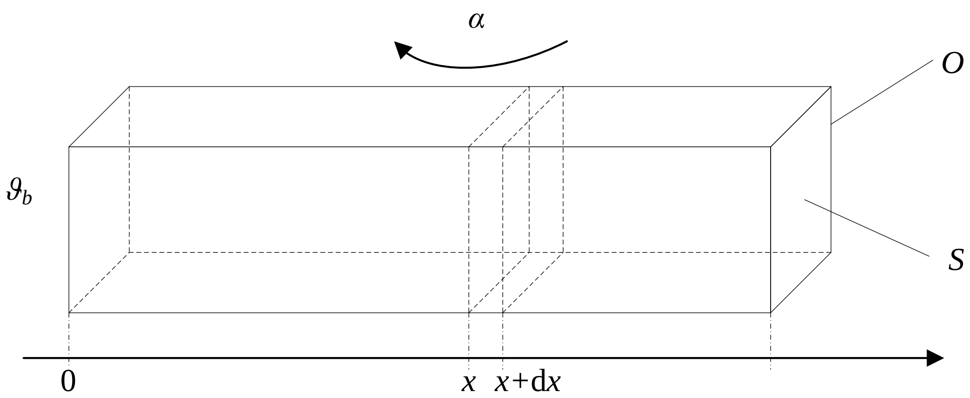
$$P_g = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R_{fs} + R_{sa}} \tag{3.6}$$

$$\vartheta = P_g\left(R_{fs} + R_{sa}\right) + \vartheta_a = 84{,}09\text{°C} \tag{3.7}$$

Дакле, при температури уља једнакој или већој од 84,09°C целокупна снага губитака генерисаних у зиду суда се одводи ка амбијенту.

4. Задатак

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине d*x*, на растојању *x* од тела на које је ребро ослоњено (слика 4.1) гласи:



Слика 4.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{4.1}$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе x (на месту x), а d$q_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине dx. Зависност снаге провођења од координате x гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{4.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати x, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}dx \tag{4.3}$$

Израз (4.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине dx је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.4}$$

Уврштавањем у једначину (4.1) израза за диференцијал функције (4.3) и снаге преноса топлоте струјањем (4.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{4.7}$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{4.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

3. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$:

$$\vartheta(x=0)=\vartheta_b \tag{4.9}$$

4. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda\cdot\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L}=0 \tag{4.10}$$

На основу израза (4.7), (4.9) и (4.10) може се написати:

$$C_1+C_2+\vartheta_a=\vartheta_b \tag{4.11}$$

$$C_1me^{mL}-C_2me^{-mL}=0 \tag{4.12}$$

Из једначине (4.12) добија се

$$C_2=C_1e^{2mL} \tag{4.13}$$

Заменом (4.13) у (4.11) добија се

$$C_1+C_1e^{2mL}+\vartheta_a=\vartheta_b \tag{4.14}$$

$$C_1=\frac{\vartheta_b-\vartheta_a}{1+e^{2mL}} \tag{4.15}$$

$$C_2=\frac{(\vartheta_b-\vartheta_a)e^{2mL}}{1+e^{2mL}} \tag{4.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x)=\frac{\vartheta_b-\vartheta_a}{1+e^{2mL}}e^{mx}+\frac{(\vartheta_b-\vartheta_a)e^{2mL}}{1+e^{2mL}}e^{-mx}+\vartheta_a \tag{4.16}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$q_{uk}=-S\lambda\frac{d\vartheta}{dx}(x=0)=-S\lambda m\left(\frac{\vartheta_b-\vartheta_a}{1+e^{2mL}}-\frac{(\vartheta_b-\vartheta_a)e^{2mL}}{1+e^{2mL}}\right)=-S\lambda m\left(\frac{(\vartheta_b-\vartheta_a)(1-e^{2mL})}{1+e^{2mL}}\right) \tag{4.17}$$

Ефикасност ребра за хлађење дефинише се као однос снаге којом се топлота односи са реалног ребра и снаге којом би се топлота односила са површи омотача цилиндричног ребра за хлађење чија би температура била ϑ:

$$\eta=\frac{q_{uk}}{\alpha S_{rebra}(\vartheta-\vartheta_a)}=\frac{-ab\lambda m\left(\frac{(\vartheta_b-\vartheta_a)(1-e^{2mL})}{1+e^{2mL}}\right)}{\alpha(ab+2(a+b)L)(\vartheta-\vartheta_a)}=0,9349 \tag{4.18}$$

<u>5. Задатак</u>

Биланс снаге у стационарном топлотном стању за посматрани елемент (4,4) је:

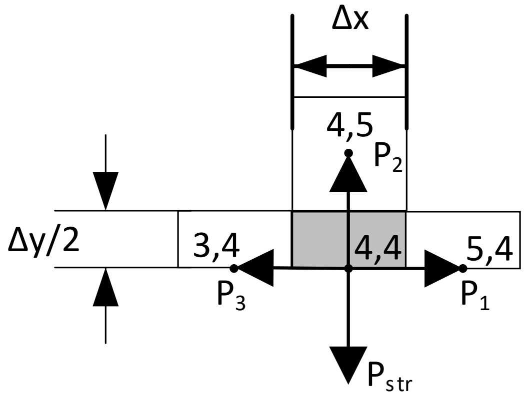
$$P_{gen}=P_{prenosa} \tag{5.1}$$

где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Снага којом се топлота генерише у елементу је

$$P_{gen}=q_v\Delta x\frac{\Delta y}{2}L \tag{5.2}$$



Слика 5.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{5.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 4), (4, 5) и (5,4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{3} P_k \tag{5.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{5,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{5,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{4,5}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{L\Delta x}} \tag{5.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{3,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{3,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.7}$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{L\Delta x}} = \alpha L\Delta x\left(\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{\infty}^p\right) \tag{5.8}$$

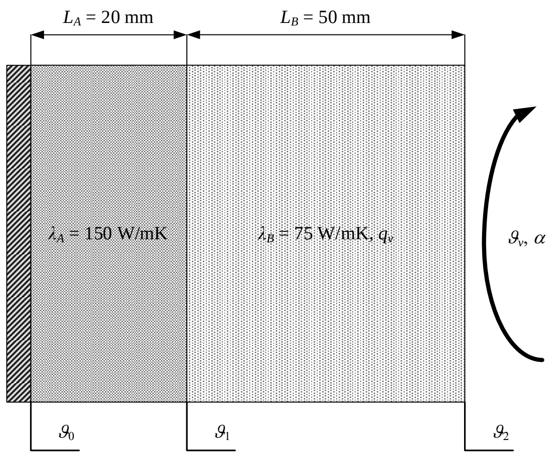
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 13. 2. 2023.

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић



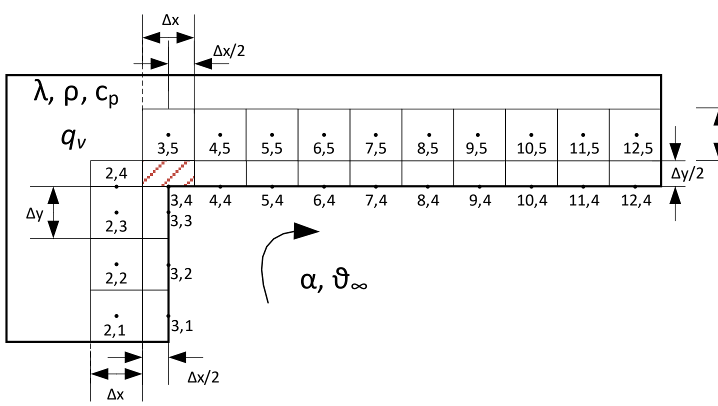
1. Раван зид се састоји из два слоја, израђена од различитих материјала A и B. У слоју B се равномерно по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v = 3\cdot10^5$ W/m^3, док у слоју A нема губитака. Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици. Гранична површ (лева) слоја A је добро топлотно изолована, а гранична површ слоја B се хлади водом температуре $\vartheta_v = 30$°C, уз коефицијент преласка топлоте струјањем $\alpha = 200$ W/(m^{2}K). Одредити температуру граничне изоловане површи слоја A (ϑ_0). (2п)

2. Кроз три сабирнице, сваке попречног пресека висина x ширина = h x a, дужине L, са растојањем између суседних вертикалних страница b, протиче струја I. Услед различите изложености пољу суседних сабирница, снаге губитака у левој и десној сабирници су исте и износе P_{ld}, а у средњој P_s. Температура амбијента износи ϑ_a. Сабирнице су различито обојене, због чега се разликују коефицијенти сивоће сваке од њих: за крајњу леву ε_l, за средњу ε_s и за крајњу десну ε_d (познато је да је $\varepsilon_l > \varepsilon_d > \varepsilon_s$). Фактори виђења од крајњих сабирница ка слободном простору износе F_{ld}. Због мале разлике температуре сабирница, снага размене топлоте зрачењем између њих се може занемарити. Коефицијент преласка топлоте струјањем са сабирница на ваздух износи α. При решавању задатка сматрати да сабирнице „лебде" у ваздуху, односно да им све четри стране учествују у размени топлоте струјањем и зрачењем. Написати изразе из којих се може израчунати температура сабирница. Која сабирница ће бити најтоплија, а која најхладнија и зашто. При прорачуну занемарити отпор преласку топлоте провођењем кроз слој фарбе. (2 п)

3. Четири једножилна кабла пресека бакра $S_{Cu} = 95$ mm^2, са PVC изолацијом дебљине изолације $\delta_{iz} = 1$ mm ($\lambda_{PVC} = 0{,}16$ W/(mK)) положена је у тло специфичне топлотне отпорности ρ_z=2,5 (mK)/W. Позбнати су подаци за бакар: $\sigma_{20\,Cu} = 56\cdot10^6$ S/m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{Cu20} = 4{,}29\cdot10^{-3}$°C^{-1}. Проводници су заливени материјалом добре топлотне проводности тако да се налазе у цилиндру пречника $D = 40$ mm. Максимална дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{doz} = 70$°C, а температура земље удаљене од кабла $\vartheta_z = 20$°C. Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл. При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтну тло", на коме је температура једнака $\vartheta_z = 20$°C, може узети цилиндар ваљка пречника $D_{ref} = 1000$ mm. (2п)

4. Посматрају се два елементарна делића који се налазе на растојању L, паралелно један другом тако да је потег који их спаја нормалан на површи оба делића. Један делић се заротира тако да вектор нормале на његову површ заклапа угао φ са потегом. Одредити за колико је потребно померити ротирани делић тако да енергија која на њега стиже са другог делића остане иста као у почетном стању. (2п)

5. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (3,4). При постављању израза који обухвата и временску промењљивост температуре, користити имплицитну методу. По запремини постоји генерисања топлоте. Запреминском густином q_v. Топлотна проводност материјала је λ, специфични топлотни капацитет је c_p, густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је α. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (2п)



1. Задатак

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 16}{\pi}} = 4{,}51\ mm \tag{1.1}$$

па је спољашњи пречник једножилног кабла:

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 4{,}51 + 2 \cdot 2 = 8{,}51\ mm \tag{1.2}$$

Подужна снага генерисања топлоте у проводнику износи

$$P'_\gamma = RI^2 = \frac{1}{\sigma \cdot S} \cdot (J \cdot S)^2 = \frac{1}{56 \cdot 16} \cdot (4{,}5 \cdot 16)^2 = 5{,}79\ {}^{W}/_{m} \tag{1.3}$$

Подужна топлотна отпорност изолације кабла износи

$$R'_{iz} = \frac{1}{2\pi\lambda_{iz}} \ln\frac{D_s}{D_u} = 0{,}05\ {}^{mK}/_{W} \tag{1.4}$$

У устаљеном стању, сва топлота генерисана у проводнику преноси се кроз изолацију до њене површине и одатле се струјањем и зрачењем предаје амбијенту. На основу овога можемо написати следећу једначину:

$$P'_\gamma = \alpha D_s \pi(\vartheta_s - \vartheta_a) + \varepsilon\sigma_c D_s \pi((\vartheta_s + 273{,}15)^4 - (\vartheta_a + 273{,}15)^4) \tag{1.5}$$

Из ове једначине добијамо вредност температуре површи изолације која је у додиру са ваздухом ϑ_s = 59,47C.

Температура граничне површи изолације која је у додиру са бакарним проводником може се одредити из следећег израза:

$$P'_\gamma = \frac{\vartheta_u - \vartheta_s}{R'_{iz}} \tag{1.6}$$

и износи ϑ_u = 59,76°C.

2. Задатак

Посматра се прво случај када се користи акумулациони бојлер. Потрошњом V = 120 l воде температуре $\vartheta_{potrš}$ = 45°C током једног дана температура топле воде у бојлеру опадне са ϑ_{max} = 90°C на ϑ_{min} = 50°C. Током сваке употребе потребно је потрошеној количини воде предати енергију потребну да се она загреје са ϑ_{vod} = 15°C на $\vartheta_{potrš}$ = 45°C:

$$\begin{gathered} E^{aku}_{potrš} = \int_{t=0}^{24h} \rho_v c_{pv} Q_v (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})\, dt = \rho_v c_{pv}(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) \int_{t=0}^{24h} Q_v\, dt = \\ \rho_v c_{pv}(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})V = 15{,}12\ MJ = 4{,}2\ kWh \end{gathered} \tag{2.1}$$

Енергија која се у току дана изгуби провођењем кроз топлотну изолацију бојлера може се апроксимирати као:

$$E_{gub} = P_{prov} \cdot 24h = \frac{\frac{\vartheta_{max} + \vartheta_{min}}{2} - 20°\mathrm{C}}{R^T} \cdot 24h = 2{,}25\ kWh \tag{2.2}$$

Дакле, укупан дневни утрошак енергије једнак је

$$E^{aku}_{uk} = E^{aku}_{potrš} + E_{gub} = 7.85\ kWh \tag{2.3}$$

Ова енергија обезбеђује се утрошком електричне енергије током јефтине тарифе. Њене цена (ако је цена једног киловата јефтине електричне енергије означена са *cena*) једнака је

$$C^{aku}_{uk} = E^{aku}_{uk} \cdot cena\ [RSD] \tag{2.4}$$

У случају када се користи проточни бојлер, вода се загрева само онда када се и троши.
Дакле, укупна потребна количина енергије за загревање утрошене воде у току једног дана једнака је

$$E^{prot}_{potr} = \rho_v c_{pv} V(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) = 15{,}12\ MJ = 4{,}2\ kWh \tag{2.5}$$

У случају када се користи проточни бојлер нема никаквих губитака, па важи

$$E^{prot}_{uk} = E^{prot}_{potrš} = 4{,}2\ kWh \tag{2.6}$$

Половина ове енергије обезбеђује се током скупе, а половина током јефтине тарифе. Укупна цена утрошене електричне енергије при употреби проточног бојлера је

$$C^{prot}_{uk} = \frac{E^{prot}_{uk}}{2} \cdot 4 \cdot cena + \frac{E^{prot}_{uk}}{2} \cdot cena = \frac{5}{2} \cdot E^{prot}_{uk} \cdot cena\ [RSD] \tag{2.7}$$

Употребом проточног бојлера остварује се уштеда у утрошеној електричној енергији од 2,25 kWh тј. смањење за 34,9%. Однос цена утрошене електричне енергије је

$$\frac{C^{aku}_{uk}}{C^{prot}_{uk}} = \frac{E^{aku}_{uk} \cdot cena}{\frac{5}{2} \cdot E^{prot}_{uk} \cdot cena} = 0.614 \tag{2.8}$$

односно, цена утрошене енергије при примени проточног бојлера већа је за 62,8%.

У случају проточног бојлера проток воде из водоводне мреже, температуре 15°C, је константан. У случају акумулационог бојлера мења се вредност количине воде која се истаче из бојлера (што је температура воде у бојлеру ϑ_{vb} већа, мањи је проток уласка воде температуре 15°C и изласка воде температуре ϑ_{vb}).

3. Задатак

Тражени фактор виђења F_{ij} се може одредити као разлика фактора виђења F_{i12} између хоризонталне површи i (X x Y) и вертикалне површи димензија X x (Z_1+Z_2), и фактора виђења F_{i1} између хоризонталне површи i (X x Y) и вертикалне површи j са прве слике (X x Z_1).

$$W = \frac{Y}{X}, H_{12} = \frac{Z_1+Z_2}{X}, H_1 = \frac{Z_1}{X}$$

$$\begin{aligned} F_{i12} = \frac{1}{\pi W}\Bigg(& W\tan^{-1}\frac{1}{W} + H_{12}\tan^{-1}\frac{1}{H_{12}} - \left({H_{12}}^2 + W^2\right)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\left({H_{12}}^2+W^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{1}{4}ln\left\{\frac{(1+W^2)(1+{H_{12}}^2)}{1+W^2+{H_{12}}^2}\left[\frac{W^2(1+W^2+{H_{12}}^2)}{(1+W^2)(W^2+{H_{12}}^2)}\right]^{W^2}\left[\frac{{H_{12}}^2(1+W^2+{H_{12}}^2)}{(1+{H_{12}}^2)(W^2+{H_{12}}^2)}\right]^{{H_{12}}^2}\right\}\Bigg) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} F_{i1} = \frac{1}{\pi W}\Bigg(& W\tan^{-1}\frac{1}{W} + H_1\tan^{-1}\frac{1}{H_1} - \left({H_1}^2 + W^2\right)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\left({H_1}^2+W^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{1}{4}ln\left\{\frac{(1+W^2)(1+{H_1}^2)}{1+W^2+{H_1}^2}\left[\frac{W^2(1+W^2+{H_1}^2)}{(1+W^2)(W^2+{H_1}^2)}\right]^{W^2}\left[\frac{{H_1}^2(1+W^2+{H_1}^2)}{(1+{H_1}^2)(W^2+{H_1}^2)}\right]^{{H_1}^2}\right\}\Bigg) \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$F_{ij} = F_{i12} - F_{i1} = 0{,}2329 - 0{,}2 = 0{,}0329 \tag{1.3}$$

4. Задатак

Диференцијална једначина која описује промену температуре дуж ребра у устаљеном добија се на следећи начин:

$$q_s = -\lambda\, grad\, \vartheta \tag{3.1}$$

$$q_{sx} = -\lambda\, \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.2}$$

$$q(x) = -\lambda\frac{D^2\pi}{4}\,\frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.3}$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\lambda\frac{D^2\pi}{4}\,\frac{d^2\vartheta}{dx^2} \tag{3.4}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha(\vartheta(x) - \vartheta_a)D\pi dx \tag{3.5}$$

$$dq_\alpha(x) = -dq(x) \tag{3.6}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{4\alpha}{\lambda D}(\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.7}$$

Опште решење диференцијалне једначине:

$$\vartheta(x) = C_1\cdot e^{m\cdot x} + C_2\cdot e^{-m\cdot x} + \vartheta_a \tag{3.8}$$

где је

$$\vartheta m = \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda D}} \tag{3.9}$$

Интеграционе константе које фигуришу у општем решењу одређују се из граничних услова за базисе ребра:

$$\vartheta(x=0) = \vartheta \tag{3.10}$$

$$\vartheta(x=L) = \vartheta_a \tag{3.11}$$

Заменом општег решења диференцијалне једначине у изразе за граничне услове добија се систем једначина

$$C_1 + C_2 + \vartheta_a = \vartheta \tag{3.12}$$

$$C_1\cdot e^{m\cdot L} + C_2\cdot e^{-m\cdot L} + \vartheta_a = \vartheta_a \tag{3.13}$$

и њиховим решавањем по C_1 и C_2 добијају се интеграционе константе:

$$C_1 = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} \tag{3.14}$$

$$C_2 = \frac{-(\vartheta - \vartheta_a)}{1 - e^{2mL}} e^{2mL} \tag{3.15}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} e^{mx} + \frac{-(\vartheta - \vartheta_a)e^{2mL}}{1 - e^{2mL}} e^{-mx} + \vartheta_a = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (e^{mx} - e^{2mL-mx}) + \vartheta_a \tag{3.16}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$\begin{aligned} q_{uk} &= \int_{x=0}^{L} \alpha(\vartheta(x) - \vartheta_a) dS = \int_{x=0}^{L} \alpha \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (e^{mx} - e^{2mL-mx}) D\pi dx \\ &= \alpha D\pi \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} \left(\frac{1}{m} e^{mL} + \frac{1}{m} e^{2mL-mL} - \frac{1}{m} e^{m\cdot 0} - \frac{1}{m} e^{2mL-m\cdot 0} \right) \\ &= \frac{\alpha D\pi}{m} \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (2e^{mL} - 1 - e^{2mL}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ефикасност ребра за хлађење дефинише се као однос снаге којом се топлота односи са реалног ребра и снаге којом би се топлота односила са површи омотача цилиндричног ребра за хлађење чија би температура била ϑ:

$$\eta = \frac{q_{uk}}{\alpha S_{rebra}(\vartheta - \vartheta_a)} = \frac{\frac{\alpha D\pi}{m} \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 - e^{2mL}} (2e^{mL} - 1 - e^{2mL})}{\alpha(DL\pi + \ D^2\pi/4)(\vartheta - \vartheta_a)} = \frac{2e^{mL} - 1 - e^{2mL}}{m\left(L + \frac{D}{4}\right)(1 - e^{2mL})} \tag{3.18}$$

5. Задатак

На основу извођења са часова предавања број 4 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_p S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{5.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 31{,}35°\text{C} \tag{5.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 62°\text{C} \tag{5.3}$$

Заменом ових вредности у израз (5.1), уз P_{hn} = 210 kW добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 4{,}672 \frac{kW}{°\text{C}} \tag{5.4}$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{5.5}$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{5.6}$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v Q_{vn} c_{pv} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}} = 8{,}554 \frac{kW}{°\text{C}} \tag{5.7}$$

$$\rho_u Q_{un} c_{pu} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}} = 34{,}426 \frac{kW}{°\text{C}} \tag{5.8}$$

У посматраној радној тачки хладњака имамо да је $P_h = P_{hn}$. Проток ваздуха једнак је номиналном $Q_v = Q_{vn}$, док температура хладног ваздуха ϑ_{hv} = 20°C. Сада, за ову снагу хлађења и овај проток можемо написати израз аналоган изразу (5.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{5.9}$$

На основу израза (5.9) долазимо до:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 44{,}55°\text{C} \tag{5.10}$$

Проток уља једнак је номиналним $Q_u = Q_{un}$. Температура топлог уља опала је на ϑ_{tu} = 90°. И за уље се сада може написати израз аналоган изразу (5.10):

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 83{,}9°\text{C} \tag{5.11}$$

За снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (5.1):

$$P_h = \frac{K_p^z S(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}}\right)} \tag{5.12}$$

Из претходног израза се добија

$$K_p^z S = \frac{P_h \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 3{,}946\,\frac{kW}{°\mathrm{C}}, \tag{5.13}$$

односно

$$\frac{K_p^z S}{K_p\, S} = \frac{K_p^z}{K_p} = \frac{3{,}946}{4{,}672} = 0{,}845 \tag{5.14}$$

Дакле, услед запрљања дошло је до смањења укупног коефицијента преноса топлоте за 15,5%.