ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 23. 5. 2023.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

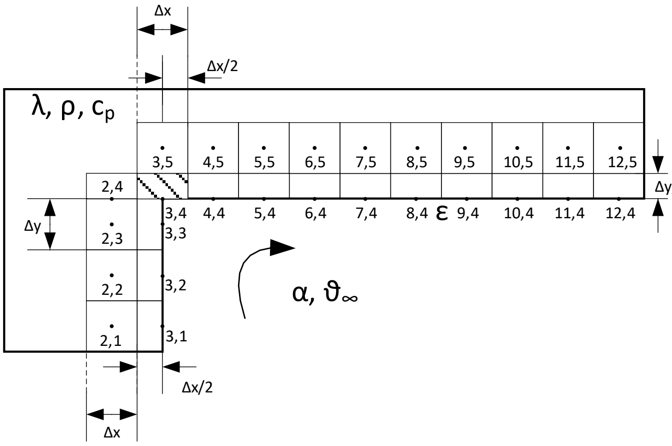
1. Посматрајмо просторију димензија a x b = 5 m x 4 m, висине h = 2,5 m. Температуру просторије је потребно загревањем одржавати на 20°C. Изнад и испод просторије, као и поред једног дужег и једног краћег зида се налазе загревани простори чија је температура 20°C. Одредити снагу загревања у случају да је температура амбијента -10°C и да је један дужи зид изложен ветру, а краћи зид није. Просторија је изолована материјалом специфичне топлотне проводности λ = 0,03 (W/(m·K)), дебљине d = 5 cm. Коефицијент преласка топлоте струјањем на унутрашњој страни и на спољашњој страни када нема ветра износи α_p = 5 (W/(m^2·K)), а на спољашњој страни када је она изложена ветру α_v = 20 (W/(m^2·K)). (2П)

2. Извести израз за снагу којом се енергија размењује зрачењем између унутрашње цеви пречника D_1 и спољашње цеи пречника D_2, које се налазе на температурама T_1 и T_2 и чије површи имају својства идеално сивог тела, коефицијента сивоће ε_1 и ε_2, респективно. Апсорпциона својства су карактерисана коефицијентима апсорпције, који су једнаки коефицијентима сивоће (емисивностима). (2,5П)

3. Ребро за хлађење је ослоњено на површ температуре ϑ_b = 80°C. Дужина ребра износи L = 300 mm, површина његовог попречног пресека S = 100 mm^2 и обим O = 40 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре ϑ_a = 30°C износи α = 8 W/m^{2}K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи λ = 237 W/mK. Одредити ефикасности ребра (η). При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси ка ваздуху једнака нули. (2,5П)

4. За елементарни облик размењивача топлоте који се састоји од унутрашње цеви кроз који струји хладни флуид у истом смеру као и топли флуид који струји кроз спољашњу цев, написати три диференцијалне једначине: 1. Која описује пренос топлоте са топлог на хладни флуид на елементарној дужини dx, на координати x, 2. Која описује повећање унутрашње енергије хладног флуида и 3. Која описује смањење унутрашње енергије топлог флуида. (2,5П)

5. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (3,4). При постављању израза који обухвата и временску промењљивост температуре, користити имплицитну методу. Топлотна проводност материјала је λ, специфични топлотни капацитет је c_p, густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је α. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (2,5П)



1. Задатак

Снага загревања просторије једнака је снази која се, кроз два зида (један краћи и један дужи), одводи ка амбијенту:

$$P_{zag} = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T} \tag{1.1}$$

где је топлотни отпор R^T једнак:

$$R^T = \left(\frac{1}{R_k^T} + \frac{1}{R_d^T}\right)^{-1} = \frac{R_k^T R_d^T}{R_d^T + R_k^T} \tag{1.2}$$

Топлотне отпорности зидова из (1.2) одређују се као

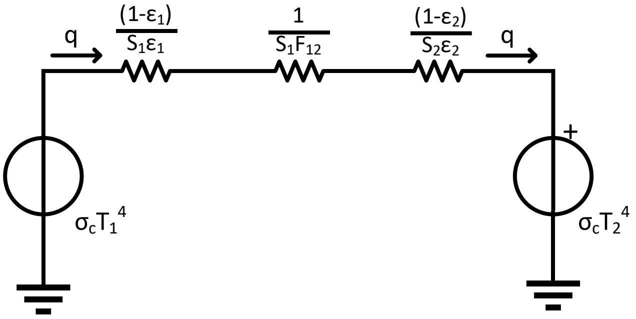
$$R_d^T = \frac{1}{\alpha_p S_d} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_d} + \frac{1}{\alpha_v S_d} \tag{1.3}$$

$$R_k^T = \frac{1}{\alpha_p S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_p S_k} \tag{1.4}$$

Заменом бројних вредности добија се: $R_d^T = 0{,}1533$ K/W; $R_k^T = 0{,}2067$ K/W; $R^T = 0{,}088$ K/W; $P_{zag} = 340{,}81$ W.

2. Задатак

Размена енергије зрачењем између површи које образују затворен простор може се анализирати на основу следеће радијационе шеме:



Слика 2.1

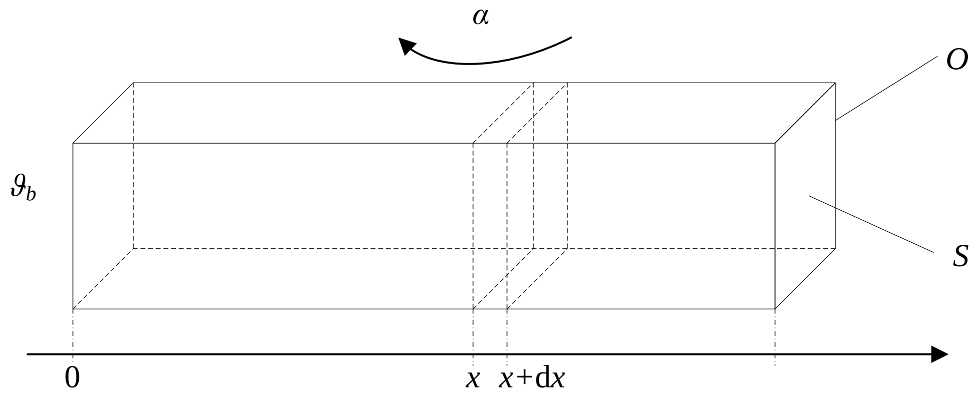
где је

$$S_1 = D_1\pi, \qquad S_2 = D_1\pi, \qquad F_{12} = 1 \tag{2.1}$$

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12}S_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c(T_1^4 - T_2^4)\,S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \,1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_1}{S_2}} = \frac{\sigma_c(T_1^4 - T_2^4)\,S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_1}{S_2}} \tag{2.2}$$

3. Задатак

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине dx, на растојању x од тела на које је ребро ослоњено (слика 3.1) гласи:



Слика 3.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{3.1}$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе x (на месту x), а d$q_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине dx. Зависност снаге провођења од координате x гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{3.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати x, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{3.3}$$

Израз (3.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине dx је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.4}$$

Уврштавањем у једначину (3.1) израза за диференцијал функције (3.3) и снаге преноса топлоте струјањем (3.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.7}$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{3.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

1. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_b \tag{3.9}$$

2. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{3.10}$$

На основу израза (3.7), (3.9) и (3.10) може се написати:

$$C_1 + C_2 + \vartheta_a = \vartheta_b \tag{3.11}$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \tag{3.12}$$

Из једначине (3.12) добија се

$$C_2 = C_1 e^{2mL} \tag{3.13}$$

Заменом (3.13) у (3.11) добија се

$$C_1 + C_1 e^{2mL} + \vartheta_a = \vartheta_b \tag{3.14}$$

$$C_1 = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} \tag{3.15}$$

$$C_2 = \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} \tag{3.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.16}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$q_{uk} = -S\lambda \frac{d\vartheta}{dx}(x = 0) = -S\lambda m \left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} - \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}}\right) = -S\lambda m \left(\frac{(\vartheta_b - \vartheta_a)(1 - e^{2mL})}{1 + e^{2mL}}\right) \tag{3.17}$$

Ефикасност ребра за хлађење дефинише се као однос снаге којом се топлота односи са реалног ребра и снаге којом би се топлота односила са површи омотача ребра за хлађење чија би температура била ϑ_b:

$$\eta = \frac{q_{uk}}{\alpha S_{rebra}(\vartheta_b - \vartheta_a)} = \frac{-S\lambda m \left(\frac{(\vartheta_b - \vartheta_a)(1 - e^{2mL})}{1 + e^{2mL}}\right)}{\alpha (S + O \cdot L)(\vartheta_b - \vartheta_a)} = 0{,}7209 \tag{3.18}$$

4. Задатак

Текстови предавања: изрази (173) – (175).

5. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (3,4) је:

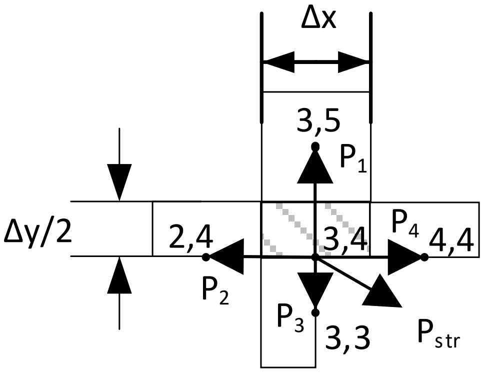
$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{5.1}$$

где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је $P_{gen} = 0$.
По имплицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у тренутном (*p*) тренутку у односу на претходни тренутак (*p-1*):

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{3,4}}{dt} = \rho\, c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{3,4}^{p-1}}{\Delta t} \tag{5.2}$$



Слика 5.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{5.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од четири члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 5), (2, 4), (3,3) и (4, 4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{4} P_k \tag{5.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{3,5}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{L\Delta x}} \tag{5.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{2,4}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{2,4}^{p}}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{3,3}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y/2}{L\Delta x/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{3,3}^{p}}{\frac{1}{\lambda L}\frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{5.7}$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{4,4}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{4,4}^{p}}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.8}$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{\infty}^{p}}{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{L\Delta x/2}} = \frac{1}{2}\alpha L \Delta x\left(\vartheta_{3,4}^{p} - \vartheta_{\infty}^{p}\right) \tag{5.9}$$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 19. 6. 2023.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

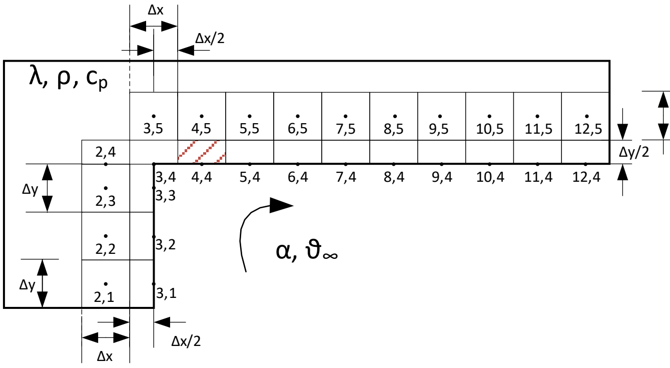
1. Једножилни кабл пресека бакра (специфична електрична проводност на 70°C $\sigma_{70,Cu} = 4{,}61 \cdot 10^7$ S/m) $S_{Cu} = 95$ mm^2, са PVC изолацијом дебљине изолације $d_{iz} = 1$ mm (топлотне специфичне проводности $\lambda_i = 0{,}16$ W/(mK)) положена је у тло специфичне топлотне отпорности $\rho_z = 2{,}5$ (mK)/W. Максимална дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{doz} = 70$°C, а температура земље удаљене од кабла $\vartheta_z = 20$°C / 10°C. Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл за наведене две температуре ϑ_z. При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтну тло", на коме је температура једнака ϑ_z, може узети цилиндар пречника $D_{ref} = 1000$ mm. (2,5П)

2. За колико се смањи површинска густина снаге којом се енергија размењује зрачењем између две паралелне велике површи ако се између њих постави екран. Површи се налазе на температурама T_1 и T_2 и имају својства идеално сивог тела, коефицијента сивоће ε_1 и ε_2, респективно. Коефицијент сивоће екрана је ε_3. Апсорпциона својства су карактерисана коефицијентима апсорпције, који су једнаки коефицијентима сивоће (емисивностима). Због величине површи може се сматрати да су ивични ефекти занемарљиво мали. (2,5П)

3. Топлота настала као последица електричних губитака од 100 W генерисана током рада електроенергетског претварача се одводи у околину преко 10 ребара за хлађење за хлађење. Дозвољена температура површи на коју су ослоњена ребра износи $\vartheta_b = 90$°C. Површина попречног пресека ребра износи $S = 2500$ mm^2, а његов обим $O = 200$ mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре $\vartheta_a = 20$°C износи $\alpha = 8$ W/m^{2}K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи $\lambda = 237$ W/mK. Одредити потребну дужину ребра. При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси ка ваздуху једнака нули. (3П)

4. За елементарни облик размењивача топлоте који се састоји од унутрашње цеви кроз који струји хладни флуид у смеру смеру струјања топлог флуида који струји кроз спољашњу цев, написати три диференцијалне једначине: 1. Која описује пренос топлоте са топлог на хладни флуид на елементарној дужини dx, на координати x, 2. Која описује повећање унутрашње енергије хладног флуида и 3. Која описује смањење унутрашње енергије топлог флуида. (2П)

5. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (4,4). При постављању израза који обухвата и временску промењљивост температуре, користити имплицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотна проводност материјала је λ, специфични топлотни капацитет је c_p, густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је α. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (2П)



1. Задатак

Укупна топлотна отпорност је:

$$R_l^T = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\lambda_i}\cdot ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\lambda_z}\cdot ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) \tag{1.1}$$

Пречници проводника и проводника са изолацијом једнаки су:

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\cdot 95}{\pi}} = 10{,}998mm \approx 11mm \tag{1.2}$$

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11mm + 2mm = 13mm \tag{1.3}$$

Па је топлотна отпорност:

$$R_l^T = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot 0{,}16\frac{W}{m\cdot K}}\cdot ln\left(\frac{13mm}{11mm}\right) + \frac{2{,}5\frac{m\cdot K}{W}}{2\cdot\pi}\cdot ln\left(\frac{1000mm}{13mm}\right) = 1{,}89\frac{Km}{W} \tag{1.4}$$

Електрична отпорност проводника једнака је:

$$R_{Cu} = \frac{1}{\sigma_{70,Cu}\cdot S} = \frac{1}{46{,}1\cdot 95} = 2{,}28\cdot 10^{-4}\Omega m \tag{1.5}$$

Једначина енергетског биланса гласи:

$$R_{Cu}I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_l^T} \tag{1.6}$$

Одавде добијамо израз за дозвољену струју:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_{Cu}R_l^T}} \tag{1.7}$$

- ϑ_z = 20°C:

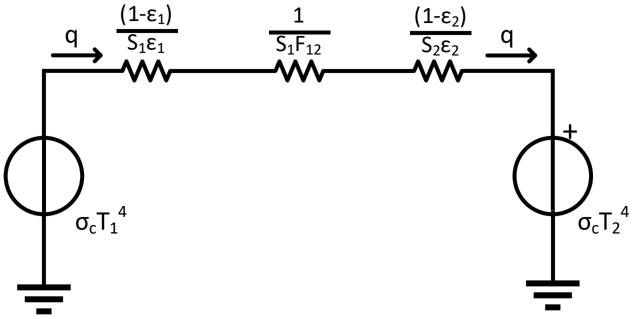
$$I = \sqrt{\frac{70-20}{2{,}28\cdot 10^{-4}\Omega m\cdot 1{,}89\frac{K}{W}}} = 340{,}4\ A \tag{1.8}$$

- ϑ_z = 10°C:

$$I = \sqrt{\frac{70-10}{2{,}28\cdot 10^{-4}\Omega m\cdot 1{,}89\frac{K}{W}}} = 372{,}9\ A \tag{1.9}$$

2. Задатак

Размена енергије зрачењем између površи које образују затворен простор може се анализирати на основу следеће радијационе шеме:



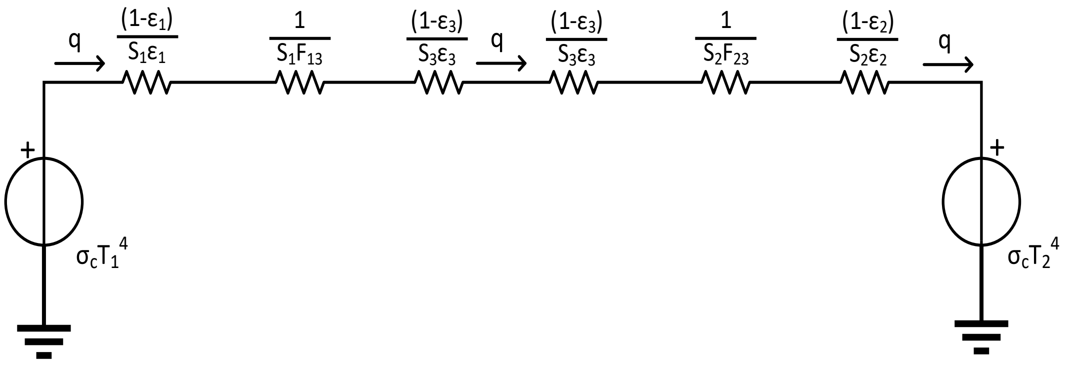
Слика 2.1

где је

$$S_1 = S_2 = S, \qquad F_{12} = 1 \tag{2.1}$$

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12}S_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c(T_1^4 - T_2^4)\,S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{\sigma_c(T_1^4 - T_2^4)\,S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \tag{2.2}$$

Радијациона шема након додавања екрана:



Слика 2.2

где је

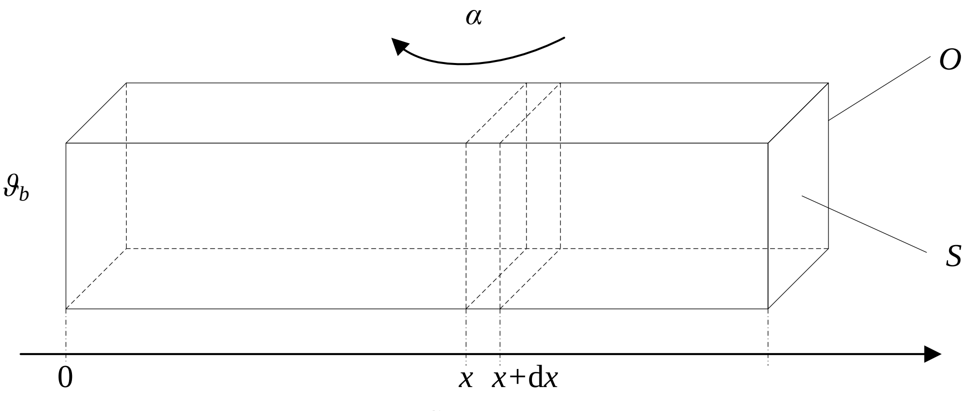
$$S_1 = S_2 = S_3 = S, \qquad F_{13} = F_{23} = 1 \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} q' &= \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1}{F_{13} S_1} + \dfrac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \dfrac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \dfrac{1}{F_{23} S_2} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \dfrac{1}{F_{13}} + \dfrac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \dfrac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \dfrac{1}{F_{23}} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \\ &= \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} + 2\left(\dfrac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\frac{q'}{q} = \frac{\dfrac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} + 2\left(\dfrac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)}}{\dfrac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4)\, S_1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}} = \frac{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} + 2\left(\dfrac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)} \tag{2.5}$$

3. Задатак

Свако ребро одводи топлоту у околину снагом од P = 10 W. Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине dx, на растојању x од тела на које је ребро ослоњено (слика 3.1) гласи:



Слика 3.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{3.1}$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе x (на месту x), а d$q_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине dx. Зависност снаге провођења од координате x гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{3.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати x, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{3.3}$$

Израз (3.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине dx је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.4}$$

Уврштавањем у једначину (3.1) израза за диференцијал функције (3.3) и снаге преноса топлоте струјањем (3.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.7}$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{3.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

3. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_b \tag{3.9}$$

4. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{3.10}$$

На основу израза (3.7), (3.9) и (3.10) може се написати:

$$C_1 + C_2 + \vartheta_a = \vartheta_b \tag{3.11}$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \tag{3.12}$$

Из једначине (3.12) добија се

$$C_2 = C_1 e^{2mL} \tag{3.13}$$

Заменом (3.13) у (3.11) добија се

$$C_1 + C_1 e^{2mL} + \vartheta_a = \vartheta_b \tag{3.14}$$

$$C_1 = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} \tag{3.15}$$

$$C_2 = \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} \tag{3.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.16}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$P = -S\lambda \frac{d\vartheta}{dx}(x = 0) = -S\lambda m \left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} - \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} \right) = -S\lambda m \left(\frac{(\vartheta_b - \vartheta_a)(1 - e^{2mL})}{1 + e^{2mL}} \right) \tag{3.17}$$

Решавањем једначине (3.17) добија се тражена дужина ребра:

$$-S\lambda m \left(\frac{(\vartheta_b - \vartheta_a)(1 - x)}{1 + x} \right) = P \tag{3.18}$$

где је $x = e^{2mL}$

$$x = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a + \frac{P}{S\lambda m}}{\vartheta_b - \vartheta_a - \frac{P}{S\lambda m}} \tag{3.19}$$

$$L = \frac{1}{2m} \ln x = \frac{1}{2m} \ln \left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a + \frac{P}{S\lambda m}}{\vartheta_b - \vartheta_a - \frac{P}{S\lambda m}} \right) = 89{,}93\ mm \tag{3.20}$$

4. Задатак

Текстови предавања: изрази (173) – (175).

5. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (4,4) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{5.1}$$

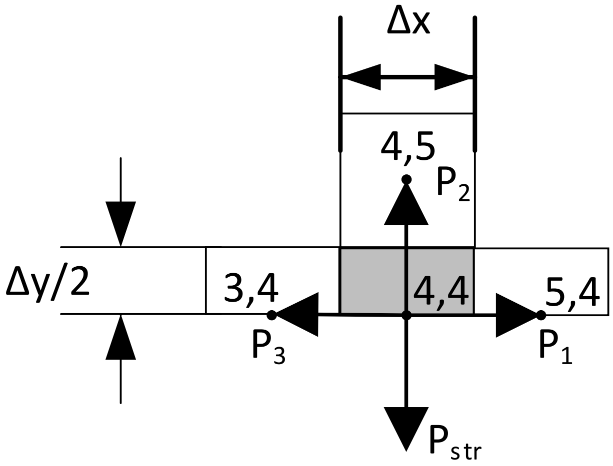
где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је $P_{gen} = 0$.

По имплицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у тренутном (p) тренутку у односу на претходни (p - 1) тренутак:

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{4,4}}{dt} = \rho\, c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{4,4}^{p-1}}{\Delta t} \tag{5.2}$$



Слика 5.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{5.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 4), (4, 5) и (5,4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{3} P_k \tag{5.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{5,4}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{5,4}^{p}}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{4,5}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{L\Delta x}} \tag{5.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{3,4}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{3,4}^{p}}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.7}$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{\infty}^{p}}{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{L\Delta x}} = \alpha L \Delta x \left(\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{\infty}^{p}\right) \tag{5.8}$$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 20. 9. 2023.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

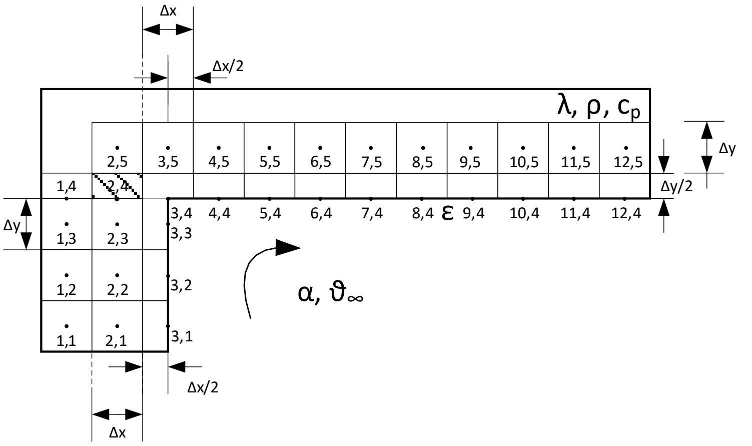
1. Једножилни кабл пресека бакра (специфична електрична проводност на 70°C $\sigma_{70,Cu} = 4{,}61\cdot10^7$ S/m, а на 90°C $\sigma_{70,Cu} = 4{,}31\cdot10^7$ S/m) $S_{Cu} = 95$ mm^2, са изолацијом дебљине изолације $d_{iz} = 1$ mm положена је у тло специфичне топлотне отпорности $\rho_z = 2{,}5$ (mK)/W. Максимална дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{PVC\,doz} = 70$°C, умреженог полиетилена (XLPE) $\vartheta_{XLPE\,doz} = 90$°C а температура земље удаљене од кабла $\vartheta_z = 10$°C. Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл за случај да је изолација израђена од а) PVC-а топлотне специфичне проводности $\lambda_{PVC} = 0{,}16$ W/(mK) и б) XLPE-а топлотне специфичне проводности $\lambda_{XLPE} = 0{,}28$ W/(mK). При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтну тло", на коме је температура једнака ϑ_z, може узети цилиндар пречника $D_{ref} = 1000$ mm. (2П)

2. Одредити снагу преноса топлоте у околину за случај да се сфера пречника D_1, коефицијента сивоће ε_1 и температуре T_1: а) налази у слободном простору температуре 20°C, б) налази унутар љуске унутрашњег пречника D_2, дебљине d и коефицијента сивоће унутрашње и спољашње површи љуске ε_2. Сфера и љуске имају идеална топлопроводна својства. Апсорпциона својства су карактерисана коефицијентима апсорпције, који су једнаки коефицијентима сивоће (емисивностима). (2П)

3. Ребро за хлађење је ослоњено на површ температуре $\vartheta_b = 62{,}09$°C. Дужина ребра износи $L = 100$ mm. Ребро је кружног попречног пресека пречника $D = 25{,}2$ mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре $\vartheta_a = 30$°C износи $\alpha = 8$ W/m^{2}K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи $\lambda = 237$ W/mK. Одредити ефикасности ребра (η). При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси ка ваздуху једнака нули. (2П)

4. За елементарни облик размењивача топлоте који се састоји од унутрашње цеви кроз који струји хладни флуид у смеру струјања топлог флуида који струји кроз спољашњу цев, написати израз за снагу хлађења за случај када су познати: коефицијент преласка топлоте са топлог на хладни флуид kp, протоци и улазне температуре оба флуида, (2П)

5. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (2,4). При постављању израза који обухвата и временску промењљивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотна проводност материјала је λ, специфични топлотни капацитет је c_p, густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је α. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (2П)



1. Задатак

Укупна топлотна отпорност је:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) \tag{1.1}$$

Пречници проводника и проводника са изолацијом једнаки су:

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10{,}998mm \approx 11mm \tag{1.2}$$

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11mm + 2mm = 13mm \tag{1.3}$$

Па је топлотна отпорност:

- Изолација од PVC-а:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}16 \dfrac{W}{m \cdot K}} \cdot ln\left(\frac{13mm}{11mm}\right) + \frac{2{,}5 \dfrac{m \cdot K}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{1000mm}{13mm}\right) = 1{,}89 \frac{Km}{W} \tag{1.4}$$

- Изолација од XLPE-а:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}28 \dfrac{W}{m \cdot K}} \cdot ln\left(\frac{13mm}{11mm}\right) + \frac{2{,}5 \dfrac{m \cdot K}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{1000mm}{13mm}\right) = 1{,}82 \frac{Km}{W} \tag{1.5}$$

Електрична отпорност проводника једнака је:

$$R_{Cu} = \frac{1}{\sigma_{70,Cu} \cdot S} = \frac{1}{46{,}1 \cdot 95} = 2{,}28 \cdot 10^{-4} \Omega m \tag{1.6}$$

$$R_{Cu,90°\mathrm{C}} = \frac{1}{\sigma_{90,Cu} \cdot S} = \frac{1}{43{,}1 \cdot 95} = 2{,}44 \cdot 10^{-4} \Omega m \tag{1.7}$$

Једначина енергетског биланса гласи:

$$R_{Cu} I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_l^T} \tag{1.7}$$

Одавде добијамо израз за дозвољену струју:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_{Cu} R_l^T}} \tag{1.8}$$

- Изолација од PVC-а:

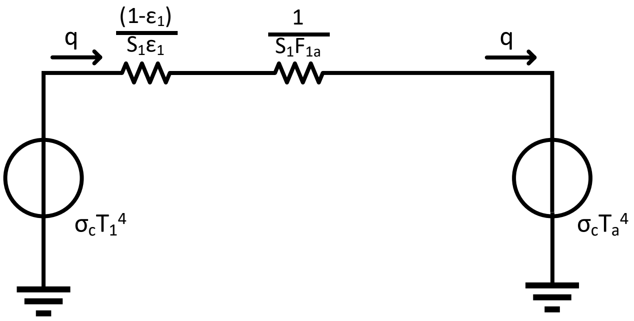
$$I = \sqrt{\frac{70 - 10}{2{,}28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1{,}89 \dfrac{K}{W}}} = 372{,}9\ A \tag{1.9}$$

- Изолација од XLPE-а:

$$I = \sqrt{\frac{90 - 10}{2{,}44 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1{,}82 \dfrac{K}{W}}} = 423{,}9\ A \tag{1.10}$$

2. Задатак

Размена енергије зрачењем између површи које образују затворен простор може се анализирати на основу следеће радијационе шеме:



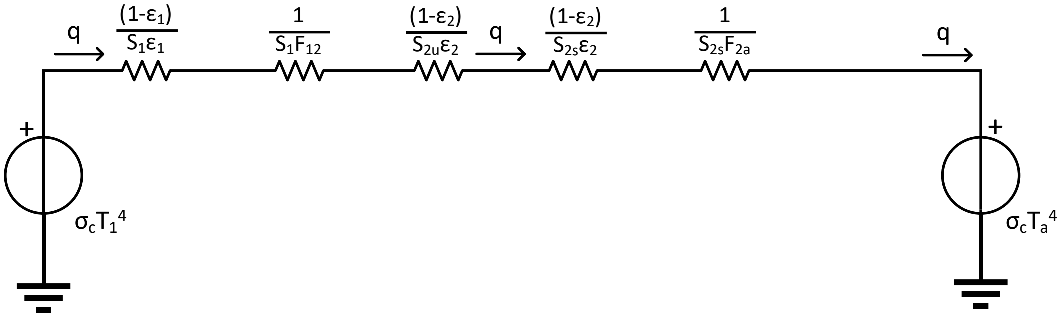
Слика 2.1

где је

$$S_1 = D_1^2\pi, \qquad F_{1a} = 1 \tag{2.1}$$

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_a^4}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1}{F_{12} S_1}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_a^4)\, S_1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} - 1 + 1} = \sigma_c \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)\, S_1 \tag{2.2}$$

Радијациона шема након додавања екрана:



Слика 2.2

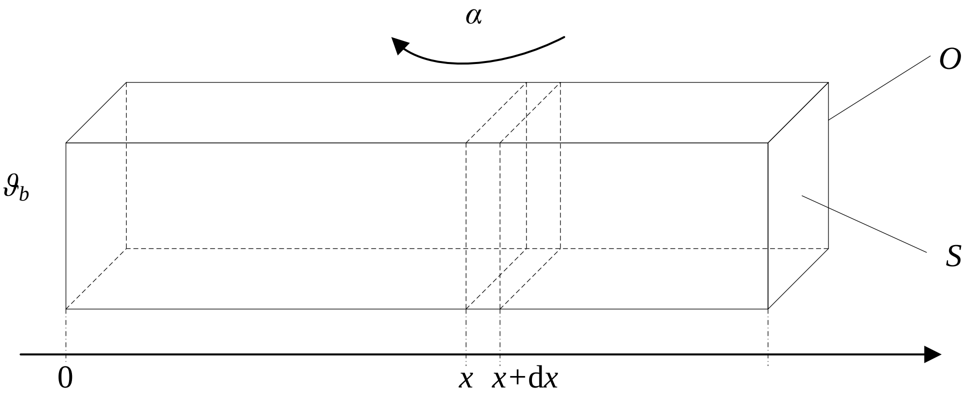
где је

$$S_1 = D_1^2\pi, \qquad S_{2u} = D_2^2\pi, \qquad S_{2s} = (D_2 + d)^2\pi, \qquad F_{12} = F_{2a} = 1 \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} q' &= \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_a^4}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1}{F_{12} S_1} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_{2u}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_{2s}} + \dfrac{1}{F_{2a} S_{2s}}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_a^4) S_{2s}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{S_{2s}}{S_1} - \dfrac{S_{2s}}{S_1} + \dfrac{S_{2s}}{S_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\dfrac{S_{2s}}{S_{2u}} - \dfrac{S_{2s}}{S_{2u}} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1 + 1} \\ &= \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_a^4) S_{2s}}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{S_{2s}}{S_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\dfrac{S_{2s}}{S_{2u}} - \dfrac{S_{2s}}{S_{2u}} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Задатак

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине d*x*, на растојању *x* од тела на које је ребро ослоњено (слика 3.1) гласи:



Слика 3.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{3.1}$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе *x* (на месту *x*), а d$q_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине d*x*. Зависност снаге провођења од координате *x* гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{3.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати *x*, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{3.3}$$

Израз (3.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине d*x* је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.4}$$

Увртшавањем у једначину (3.1) израза за диференцијал функције (3.3) и снаге преноса топлоте струјањем (3.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.7}$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{3.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

5. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_b \tag{3.9}$$

6. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{3.10}$$

На основу израза (3.7), (3.9) и (3.10) може се написати:

$$C_1 + C_2 + \vartheta_a = \vartheta_b \tag{3.11}$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \tag{3.12}$$

Из једначине (3.12) добија се

$$C_2 = C_1 e^{2mL} \tag{3.13}$$

Заменом (3.13) у (3.11) добија се

$$C_1 + C_1 e^{2mL} + \vartheta_a = \vartheta_b \tag{3.14}$$

$$C_1 = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} \tag{3.15}$$

$$C_2 = \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} \tag{3.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.16}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$q_{uk} = -S\lambda \frac{d\vartheta}{dx}(x = 0) = -S\lambda m \left(\frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} - \frac{(\vartheta_b - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}}\right) = -S\lambda m \left(\frac{(\vartheta_b - \vartheta_a)(1 - e^{2mL})}{1 + e^{2mL}}\right) \tag{3.17}$$

Ефикасност ребра за хлађење дефинише се као однос снаге којом се топлота односи са реалног ребра и снаге којом би се топлота односила са површи омотача цилиндричног ребра за хлађење чија би температура била ϑ_b:

$$\eta = \frac{q_{uk}}{\alpha S_{rebra}(\vartheta_b - \vartheta_a)} = \frac{-\frac{D^2 \pi}{4} \lambda m \left(\frac{(\vartheta_b - \vartheta_a)(1 - e^{2mL})}{1 + e^{2mL}}\right)}{\alpha \left(\frac{D^2 \pi}{4} + D\pi L\right)(\vartheta_b - \vartheta_a)} = 0{,}924 \tag{3.18}$$

4. Задатак

Текстови предавања: поглавље 5.2.1.

5. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (2,4) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{5.1}$$

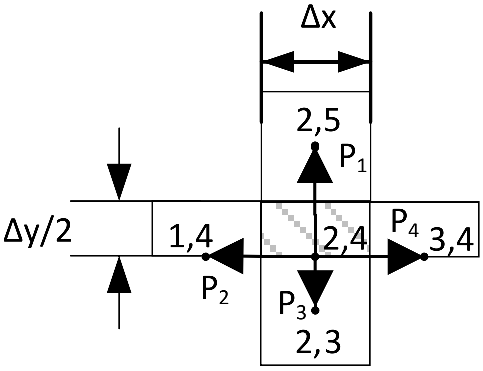
где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и

- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је $P_{gen} = 0$.
По експлицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у наредном (p + 1) тренутку у односу на садашњи тренутак (p):

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{2,4}}{dt} = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{2,4}^{p+1} - \vartheta_{2,4}^{p}}{\Delta t} \tag{5.2}$$



Слика 5.1

Топлотна енергија се са тела на околину (ка осталим деловима) може пренети само провођењем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} \tag{5.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од четири члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (2, 5), (1, 4), (2,3) и (3, 4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{4} P_k \tag{5.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{2,4}^{p} - \vartheta_{2,5}^{p}}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y}{L \Delta x}} \tag{5.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{2,4}^{p} - \vartheta_{1,4}^{p}}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{2,4}^{p} - \vartheta_{1,4}^{p}}{\frac{2}{\lambda L} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{2,4}^{p} - \vartheta_{2,3}^{p}}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y/2}{L \Delta x}} = \frac{\vartheta_{2,4}^{p} - \vartheta_{2,3}^{p}}{\frac{1}{\lambda L} \frac{\Delta y}{2 \Delta x}} \tag{5.7}$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{2,4}^{p} - \vartheta_{3,4}^{p}}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{2,4}^{p} - \vartheta_{3,4}^{p}}{\frac{2}{\lambda L} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.8}$$