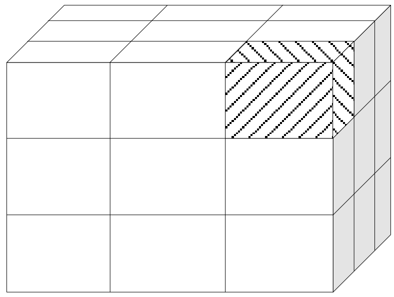
**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

---

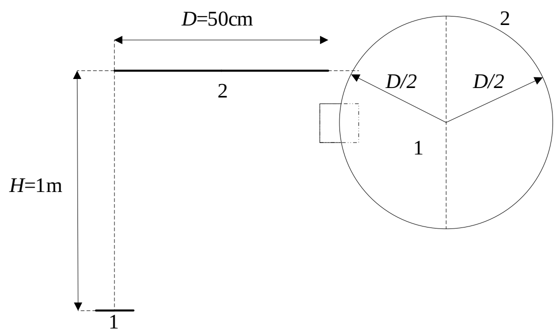
**Први колоквијум (први термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 150 минута* 27. 11. 2021.
*Укупан број поена износи 11,5*
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*



1. Једна коцка странице $L$ (слика), направљена од хомогеног материјала познатих топлотних карактеристика, загрева се равномерно по запремини познатом запреминском густином снаге ($q_v$). Коефицијенти преласка топлоте струјањем са горње површи ($\alpha_g$), доње површи ($\alpha_d$) и остале четири вертикалне површи ($\alpha_z$) на околни флуид температуре $\vartheta_f$ су познати. Запремина је подељена на $3^3$ једнаких делова. Написати једначину по експлицитној методи коначних елемената за део коцке који је са три стране у додиру са ваздухом (шрафирана коцка на слици). Једначину написати за нестационарни топлотни процес. Усвојити да тачке које репрезентују малу коцку буду у њеном центру, због чега је потребно уважити и пренос топлоте провођењем између ове тачке и површи. Занемарити снагу преноса топлоте зрачењем. Једначину није потребно сређивати у смислу увођења Fourier-овог и Biot-овог број. (2,5 поена)

2. Нацртати топлотне шема процеса загревања воде у шерпи која се налази на рингли сваког од три типа електричног шпорета: са класичном ринглом, са стакло-керамичком плочом и са плочом са индукционим загревањем. Може се сматрати да сам извор топлоте (грејач и његов носач, односно дно шерпе у случају индукционог загревања) представља изотермичку запремину, чија је температура једнака температури површи на коју се поставља шерпа. Контактна топлотни отпор између рингле и шерпе има значајну вредност коју треба уважити у моделу. У моделу уважити следеће топлотне капацитете: извора топлоте, саме шерпе и садржаја у њој и плоче на коју се поставља шерпа (она није идеално топлотно изолована од остатка плоче шпорета и може се сматрати да су губици преко остатка плоче шпорета пропорционално сразмерни разлици температуре плоче на коју се ставља шерпа и температуре амбијента). Сматрати да је загревање самог индуктора занемарљиво. Да ли се и зашто вредности топлотног капацитета код класичног и шпорета са стакло-керамичком плочом разликују. (3 поена)




3. Написати израз у форми двоструког интеграла помоћу ког се одређује вредност фактора виђења површи (2) са елементарне површи (1), приказаних на слици (дати су погледи са стране и одозго). Површ 2 је круг пречника 50 cm. Потребно је да израз под интегралом садржи само познате димензије, као и промењливе по којима се интеграли ($r$ и $\varphi$) (3 поена)

4. Посматрајмо једножилни кабл површине попречног пресека бакра $S_{Cu} = 95\ \text{mm}^2$ (специфична електрична проводност бакра на 20°C је $\sigma_{20\,Cu} = 56\cdot10^6$ S/m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности бакра са температуром износи $\alpha_{Cu20} = 4{,}29\cdot10^{-3}\,°\text{C}^{-1}$) са PVC изолацијом. У зависности од напонског нивоа разликује се дебљина изолације: 1) за 0,4 kV, $d_{iz} = 1$ mm; 2) за 6 kV, $d_{iz} = 2{,}5$ mm (специфична топлотна проводност $\lambda_{PVC} = 0{,}16$ W/(m K)). Кабл се налази у ваздуху, а коефицијент преласка топлоте струјањем са површине кабла на ваздух температуре $\vartheta_a = 20$°C зависи од спољашњег пречника кабла, као и температуре површине изолације и температуре околног ваздуха као $\alpha = 0{,}702\cdot(\vartheta_p - \vartheta_a)^{0{,}188}\cdot D^{-0{,}436}$ [W/(m$^2$K)]. Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз каблове за 0,4 kV и 6 kV. Дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{doz} = 70$°C. Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\,\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\vec{i}_z$. (3 поена)

**1. Задатак**

Биланс снаге за посматрану коцку странице $L/3$ гласи:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{1.1}$$

где су:

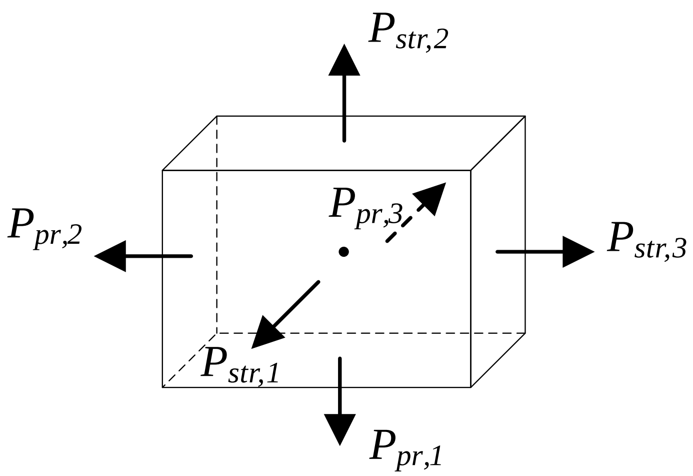
- $P_{gen}$ - укупна снага којом се енергија генерише у посматраној коцки,
- $P_{akum}$ - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраној коцки и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са суседним коцкама и амбијентом.

По запремини коцке енергија се генерише запреминском густином снаге $q_v$, па је укупна снага генерисана у посматраној коцки:

$$P_{gen} = q_v V = q_v \frac{L^3}{27} \tag{1.2}$$

По експлицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у наредном ($p + 1$) тренутку у односу на тренутни ($p$):

$$P_{akum} = \rho c_p \frac{L^3}{27}\frac{d\vartheta}{dt} = \rho\, c_p \frac{L^3}{27}\frac{\vartheta^{p+1} - \vartheta^p}{\Delta t} \tag{1.3}$$




Слика 1.1

Топлотна енергија се са посматране коцке преноси се провођењем ка суседним коцкама ($P_{prov}$) и путем провођења и струјања ($P_{str}$) ка околини:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{1.4}$$

За посматрану коцку, снага преноса топлоте провођењем се састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка коцкама испод (њена темпертура износи $\vartheta_1$)), лево ($\vartheta_2$) и иза ($\vartheta_3$) посматране коцке.

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{3} P_{pr,k} \tag{1.5}$$

$$P_{pr,1} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_1^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{L/3}{\frac{L}{3}\frac{L}{3}}} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_1^p}{\frac{3}{\lambda L}} \tag{1.6}$$

$$P_{pr,2} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_2^p}{\frac{3}{\lambda L}} \tag{1.7}$$

$$P_{pr,3} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_3^p}{\frac{3}{\lambda L}} \tag{1.7}$$

Снага преноса топлоте ка околини се такође састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте на предњој, горњој и десној страни посматране коцке. При одређивању ове снаге потребно је уважити и топлотни отпор провиђењу кроз половину посматране коцке (од центра до посматране површи).

$$P_{str} = \sum_{k=1}^{3} P_{str,k} \tag{1.8}$$

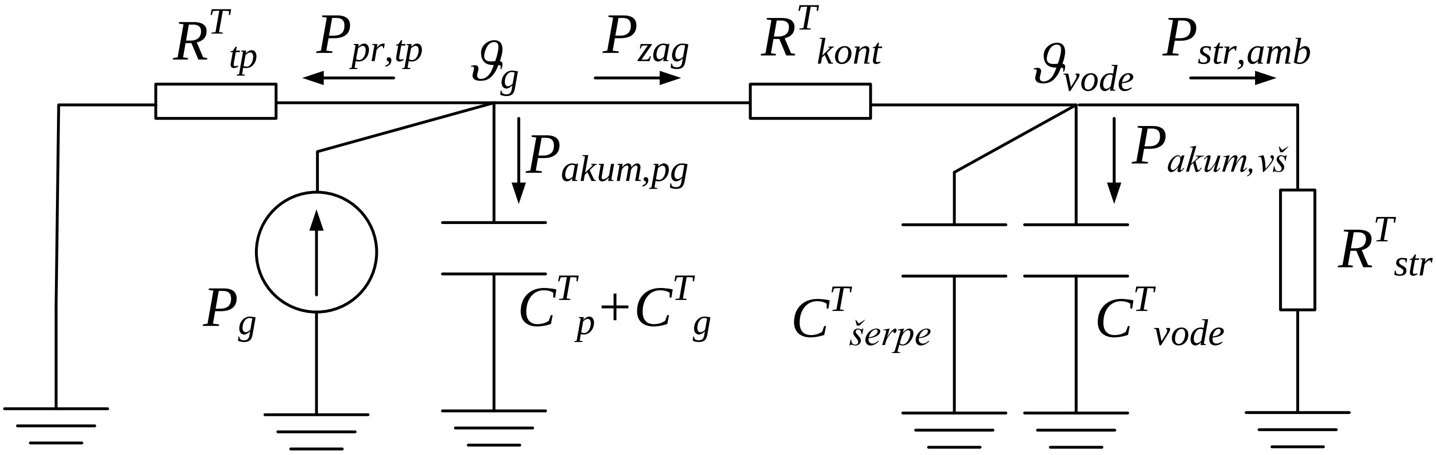
$$P_{str,1} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_f^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{L/6}{\frac{L}{3}\frac{L}{3}} + \frac{1}{\alpha_z}\frac{1}{\frac{L}{3}\frac{L}{3}}} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_f^p}{\frac{3}{2\lambda L} + \frac{1}{\alpha_z}\frac{9}{L^2}} \tag{1.9}$$

$$P_{str,2} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_f^p}{\frac{3}{2\lambda L} + \frac{1}{\alpha_g}\frac{9}{L^2}} \tag{1.10}$$

$$P_{str,3} = \frac{\vartheta^p - \vartheta_f^p}{\frac{3}{2\lambda L} + \frac{1}{\alpha_z}\frac{9}{L^2}} \tag{1.11}$$

**2. Задатак**

У случајевима шпорета са класичном ринглом и стакло-керамичком плочом топлотна шема је иста и приказана је на слици 2.1.

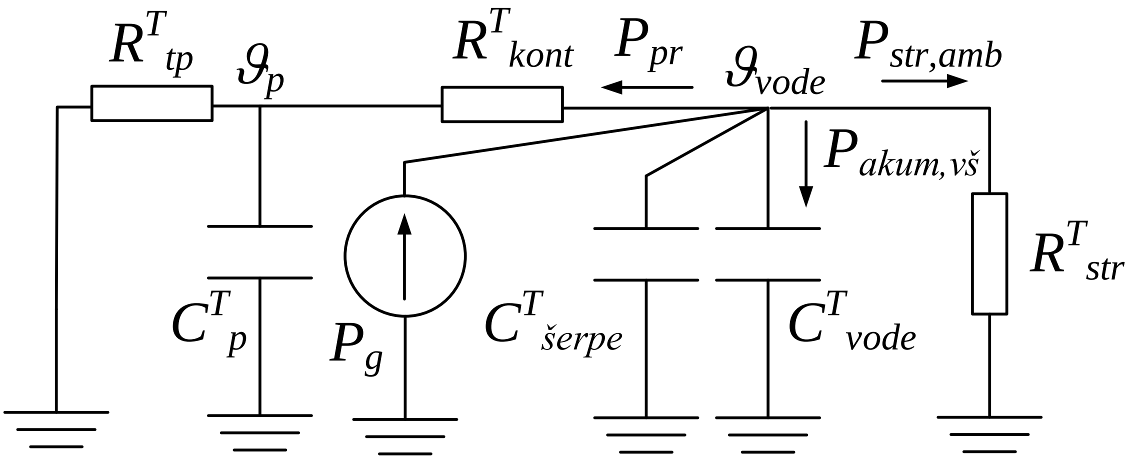



Слика 2.1

Снага загревања ($P_g$) се генерише у грејачу. Грејач са кућиштем и сама површина рингле, топлотних капацитета $C^T{}_g$ и $C^T{}_p$ и, представљају изотермичку запремину температуре $\vartheta_g$. Део снаге $P_g$ се акумулира у грејачу и рингли ($P_{akum,pg}$), део се губи провођењем преко површи шпорета ($P_{pr,tp}$), а највећи део представља снагу која ће загревати шерпу и њен садржај ($P_{zag}$). Због постојања значајне контактне отпорности између дна шерпе и рингле ($R^T{}_{kont}$), на овом отпору ће се јавити пад температуре, односно температура шерпе ће бити нижа од температуре површи рингле. Део снаге пренете ка шерпи ($P_{zag}$) ће се изгубити услед преноса топлоте са површине шерпе струјањем ка амбијенту ($P_{str,amb}$). Вода и шерпа, топлотних капацитета $C^T{}_{vode}$ и $C^T{}_{šerpe}$, такође, представљају изотермичку запремину температуре $\vartheta_{vode}$.

Разлика између шпорета са класичном ринглом и стакло-керамичком плочом је у дизајну саме површине рингле. У оба случаја грејна жица је смештена у кућиште од електроизолационог материјала, при чему је код класичног шпорета рингла масивније. Ригла код шпорета са стакло-керамичком плочом има мало кућиште у које је смештена грејна спирала, које је отворена са горње стране и са које се снага се доминантно зрачењем преноси са део стакло-керамичке плоче на коју се ставља шерпа. Последица масивније конструкције класичне рингле него стакло-керамичке је да је топлотни капацитет $C^T{}_p$ много већи у случају класичне рингле неко у случају шпорета са стакло-керамичком плочом. Због тога је време потребно за загревање (и хлађење) класичне рингле значајно дуже него у случају стакло-керамике.

Код индукционог шпорета снага загревања се индукује директно у дну шерпе. На тај начин, добија се бржи и ефикаснији процес загревања јер није потребно губити енергију и време на загревање саме масе рингле. У простору испод плоче се налази индукциони грејач, али у њему нема значајниг губитака и акумулисане топлоте. Топлотна шема за вај случај приказана је на слици 2.2. Ипак, пошто се топла шерпа налази на површини шпорета, део енергије ће се ипак, преко контактног отпора, преноси ка њој, а затим провођењем кроз остатак плоче губити ка околини.




Слика 2.1

**3. Задатак**

Фактор виђења између површи (1) и (2) одређује се по формули:

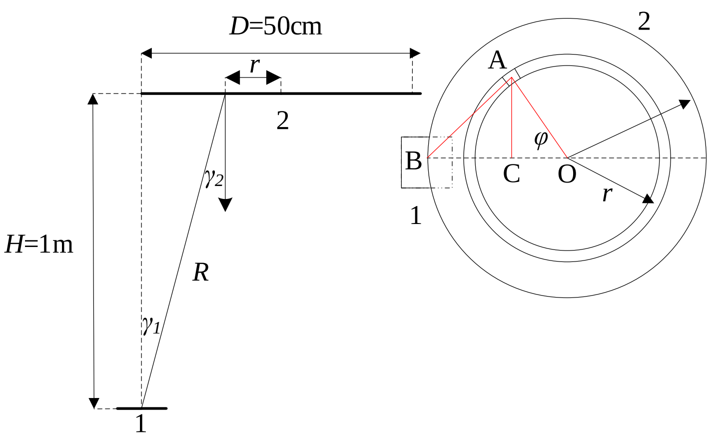
$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int\limits_{S_1} \int\limits_{S_2} \frac{\cos\gamma_1 \cos\gamma_2}{R^2\, \pi} dS_1 dS_2 \tag{3.1}$$

Обзиром да се површ (1) може сматрати елементарном (углови $\gamma_1$ и $\gamma_2$ и растојање $R$ са слике 1.1 су приближно константни за све тачке површи $S_1$), израз (3.1) се трансформише у

$$F_{12} = \int\limits_{S_2} \frac{\cos\gamma_1 \cos\gamma_2}{R^2\, \pi} dS_2 \tag{3.2}$$

Углови $\gamma_1$ и $\gamma_2$ су углови са паралелним крацима, па важи $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, одакле произилази

$$F_{12} = \int\limits_{S_2} \frac{\cos^2\gamma}{R^2\, \pi} dS_2 \tag{3.3}$$




Слика 1.1

Површ (2) се може поделити осом симетрије (ова оса пролази кроз тачке B и O) тако да се интеграли по једном полукругу (у наставку текста интеграција ће се вршити по горњој симетричној половини круга:

$$F_{12} = 2 \int\limits_{S_2/2} \frac{\cos^2\gamma}{R^2\, \pi} dS_2 \tag{3.4}$$

За угао $\gamma$ важи

$$\cos\gamma = \frac{H}{R} \tag{3.5}$$

Потег $R$ се може одредити као

$$R^2 = H^2 + AB^2 \tag{3.6}$$

При чему се дужина дужи AB може одредити из троугла OAB

$$OA = r \tag{3.7}$$

$$AC = r\sin\varphi \tag{3.8}$$

$$OC = r\cos\varphi \tag{3.9}$$

$$BC = \frac{D}{2} - OC = \frac{D}{2} - r\cos\varphi \tag{3.10}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (r\sin\varphi)^2 + \left(\frac{D}{2} - r\cos\varphi\right)^2 \tag{3.11}$$

$$AB^2 = r^2 - Dr\cos\varphi + \frac{D^2}{4} \tag{3.12}$$

$$R^2 = H^2 + r^2 - Dr\cos\varphi + \frac{D^2}{4} \tag{3.13}$$

Заменом (3.5) и (3.13) у (3.4) добија се

$$F_{12} \ = \ 2\int_{r=0}^{D/2}\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{H^2}{\left(H^2 + r^2 - Dr\cos\varphi + \frac{D^2}{4}\right)^2 \pi} r d\varphi dr \tag{3.14}$$

**4. Задатак**

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10{,}998 \approx 11\, mm, \tag{4.1}$$

па је спољашњи пречник једножилног кабла:

1) У случају 0,4 kV:

$$D_{s,1} = D_u + 2\delta_{iz,1} = 11 + 2 = 13\, mm \tag{4.2}$$

2) У случају 6 kV:

$$D_{s,2} = D_u + 2\delta_{iz,2} = 11 + 5 = 16\, mm \tag{4.3}$$

У граничном случају, при дозвољеној једносмерној струји, температура бакарног проводника једнака је 70°C, па вредност подужне електричне отпорности бакра износи:

$$R_{Cu}^{70°C} = \frac{1}{\sigma \cdot S}\big(1 + \alpha(70°C - 20°C)\big) = \frac{1}{56 \cdot 95}(1 + 4.29 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 2{,}28 \cdot 10^{-4} \Omega m \tag{4.4}$$

У стационарном топлотном стању сва топлота која настаје као последица Џулових губитака у бакарном проводнику одводи се, преко PVC изолације, у околину струјањем ка околном ваздуху. Пад температуре на слоју изолације који настаје као резултат провођења топлоте ($\vartheta_p$) описује се следећом једначином:

$$R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_p}{R_{PVC,l}^{T}} \tag{4.5}$$

Одавде се добија израз помоћу којег је могуће прорачунати температуру површине изолације у додиру са ваздухом:

$$\vartheta_p = \vartheta_{doz} - R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 \cdot R_{PVC,l}^{T} = \vartheta_{doz} - R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 \cdot \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) \tag{4.6}$$

Пренос топлоте струјањем се описује следећом једначином:

$$R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 = \alpha D_s \pi\big(\vartheta_p - \vartheta_a\big) \tag{4.7}$$

Заменом израза (4.6) и уврштавањем израза за коефицијент преласка топлоте струјањем у (4.7) добија се

$$R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 = 0{,}702\big(\vartheta_p - \vartheta_a\big)^{0{,}188} \cdot D_s^{-0{,}436} \cdot D_s \pi\big(\vartheta_p - \vartheta_a\big) \tag{4.8}$$

$$R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 = 0{,}702\big(\vartheta_p - \vartheta_a\big)^{1{,}188} \cdot D_s^{0{,}564} \cdot \pi \tag{4.9}$$

$$R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 = 0{,}702\left(\vartheta_{doz} - R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 \cdot \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) - \vartheta_a\right)^{1{,}188} \cdot D_s^{0{,}564} \cdot \pi \tag{4.10}$$

Решавањем једначине (4.10) добијају се тражене вредности струје:

1) случају 0,4 kV:

$$I_1 = 284{,}31\, A \tag{4.11}$$

2) У случају 6 kV:

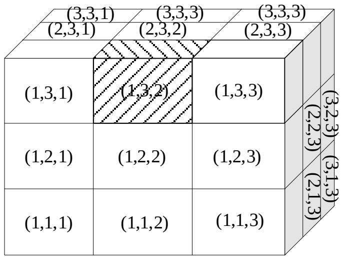
$$I_2 = 286{,}3\, A \tag{4.12}$$

# ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
# УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

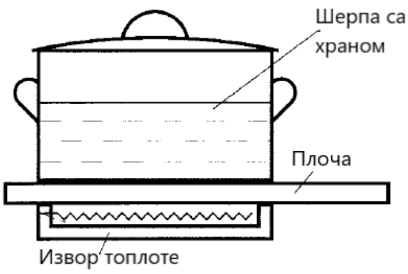
**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Први колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 150 минута* 21. 12. 2021.
*Укупан број поена износи 11*
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

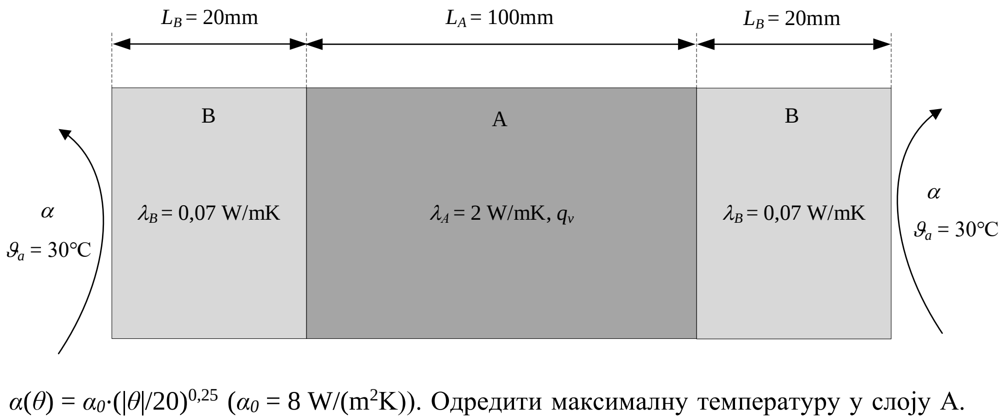



1. Једна коцка странице $L$ (слика), направљена од хомогеног материјала познатих топлотних карактеристика, загрева се равномерно по запремини познатом запреминским густином снаге ($q_v$). Коефицијенти преласка топлоте струјањем са горње површи ($\alpha_g$), доње површи ($\alpha_d$) и остале четири вертикалне површи ($\alpha_z$) на околни флуид температуре $\vartheta_f$ су познати. Запремина је подељена на $3^3$ једнаких делова. Написати једначину по имплицитној методи коначних елемената за шрафирани део коцке (на координати (1,3,2)). Једначину написати за нестационарни топлотни процес. Усвојити да тачке које репрезентују малу коцку буду у њеном центру, због чега је потребно уважити и пренос топлоте провођењем између ове тачке и површи. Занемарити снагу преноса топлоте зрачењем. Једначину није потребно срећивати у смислу увођења Fourier-овог и Biot-овог број. (2,5 поена)




2. Нацртати топлотне шема процеса загревања воде у шерпи која се налази на рингли електричног шпорета са стакло-керамичком плочом (слика горе). Може се сматрати да сам извор топлоте (грејач и његов носач (слика доле)) представља изотермичку запремину. Са носача извора топлоте, мала количина топлота се провођењем кроз простор испод плоче преноси ка амбијенту. Доминантни део топлоте генерисане у грејачу се преноси зрачењем ка плочи на коју се поставља шерпа. Сматрати да се површи понашају као идеално црна тела. Познате су све димензије и карактеристике материјала, као и фактор виђења између два диска $F_D$. Контактна топлотни отпор између рингле и шерпе има значајну вредност коју треба уважити у моделу. У моделу уважити следеће топлотне капацитете: извора топлоте и његовог носача, саме шерпе и садржаја у њој и плоче на коју се поставља шерпа (она није идеално топлотно изолована од остатка плоче шпорета и може се сматрати да су губици преко остатка плоче шпорета пропорционално сразмерни разлици температуре плоче на коју се ставља шерпа и температуре амбијента). (3 поена)

3. Написати израз у форми четвороструког интеграла помоћу ког се одређује вредност фактора виђења између два идентична паралелна диска (пречника $D$) који се налазе на растојању $L$ . Потребно је да израз под интегралом садржи само познате димензије, као и промењливе по којима се интеграли ($r$ и $\varphi$ по једном и по другом диску) (2,5 поена)




4. Раван зид се састоји из три слоја, израђена од два различита материјала A и B. У слоју A се равномерно по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v = 1700$ W/m$^3$. Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици. Граничне површ слоја B хладе се ваздухом температуре $\vartheta_a = 30$°C, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и ваздуха ($\theta = \vartheta_B - \vartheta_a$) на следећи начин: $\alpha(\theta) = \alpha_0 \cdot (|\theta|/20)^{0,25}$ ($\alpha_0 = 8$ W/(m$^2$K)). Одредити максималну температуру у слоју A. (3 поена)

**1. Задатак**

Биланс снаге за посматрану коцку странице $L/3$ гласи:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{1.1}$$

где су:

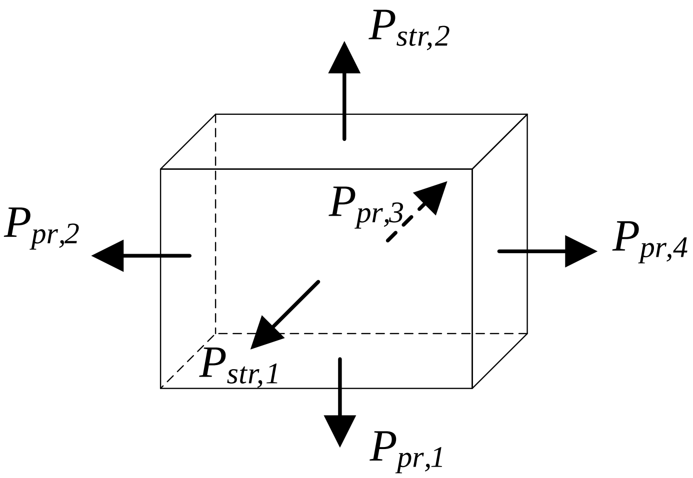
- $P_{gen}$ - укупна снага којом се енергија генерише у посматраној коцки,
- $P_{akum}$ - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраној коцки и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са суседним коцкама и амбијентом.

По запремини коцке енергија се генерише запреминском густином снаге $q_v$, па је укупна снага генерисана у посматраној коцки:

$$P_{gen} = q_v V = q_v \frac{L^3}{27} \tag{1.2}$$

По имплицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у текућем ($p$) тренутку у односу на претходни ($p$ - 1):

$$P_{akum} = \rho c_p \frac{L^3}{27}\frac{d\vartheta}{dt} = \rho\ c_p \frac{L^3}{27}\frac{{\vartheta_{1,3,2}}^p - {\vartheta_{1,3,2}}^{p-1}}{\Delta t} \tag{1.3}$$




Слика 1.1

Топлотна енергија се са посматране коцке преноси провођењем ка суседним коцкама ($P_{prov}$) и провођењем и струјањем ($P_{str}$) ка околини:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{1.4}$$

За посматрану коцку, снага преноса топлоте провођењем састоји се од четири члана који обухватају снаге преноса топлоте ка коцкама испод (њена темпертура износи $\vartheta_{1,2,2}$)), лево ($\vartheta_{1,3,1}$), иза ($\vartheta_{2,3,2}$) и десно ($\vartheta_{1,3,3}$) од посматране коцке.

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{4} P_{pr,k} \tag{1.5}$$

$$P_{pr,1} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^p - {\vartheta_{1,2,2}}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{L/3}{\frac{L}{3}\frac{L}{3}}} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^p - \vartheta_{1,2,2}^p}{\frac{3}{\lambda L}} \tag{1.6}$$

$$P_{pr,2} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^p - \vartheta_{1,3,1}^p}{\frac{3}{\lambda L}} \tag{1.7}$$

$$P_{pr,3} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^p - \vartheta_{2,3,2}^p}{\frac{3}{\lambda L}} \tag{1.7}$$

$$P_{pr,4} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^p - \vartheta_{1,3,3}^p}{\frac{3}{\lambda L}} \tag{1.8}$$

Снага преноса топлоте ка околини се састоји од два члана који обухватају снаге преноса топлоте на предњој и горњој страни посматране коцке. При одређивању ове снаге потребно је уважити и топлотни отпор провиђењу кроз половину посматране коцке (од центра до посматране површи).

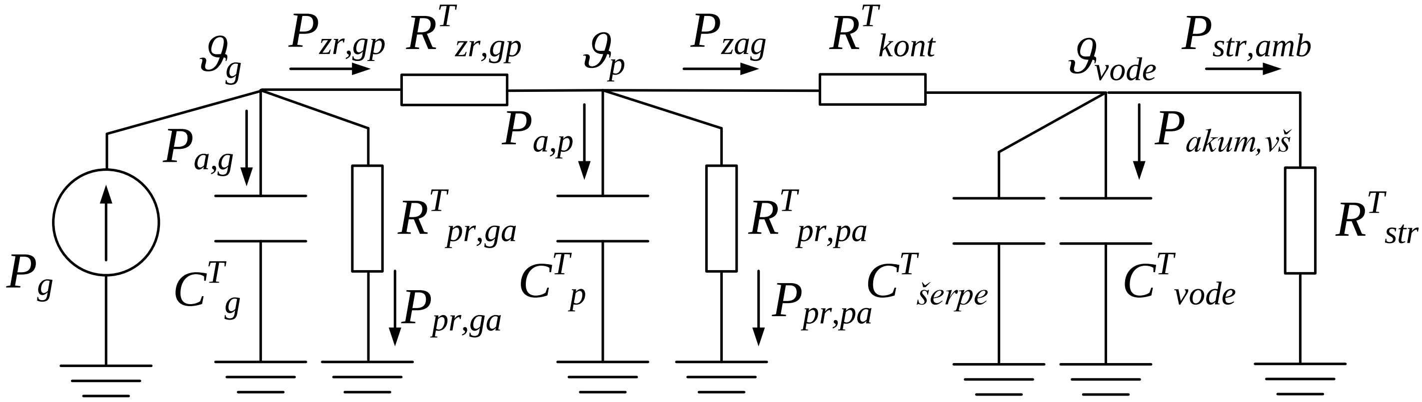
$$P_{str} = \sum_{k=1}^{2} P_{str,k} \tag{1.9}$$

$$P_{str,1} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^{p} - \vartheta_f^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{L/6}{\frac{L}{3}\frac{L}{3}} + \frac{1}{\alpha_z}\frac{1}{\frac{L}{3}\frac{L}{3}}} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^{p} - \vartheta_f^p}{\frac{3}{2\lambda L} + \frac{1}{\alpha_z}\frac{9}{L^2}} \tag{1.10}$$

$$P_{str,2} = \frac{{\vartheta_{1,3,2}}^{p} - \vartheta_f^p}{\frac{3}{2\lambda L} + \frac{1}{\alpha_g}\frac{9}{L^2}} \tag{1.11}$$

**2. Задатак**

Топлотна шема приказана је на слици 2.1.




Слика 2.1

Снага загревања ($P_g$) се генерише у грејачу. Грејач са кућиштем, укупног топлотног капацитета $C^T_g$, представља изотермичку запремину температуре $\vartheta_g$. Део снаге $P_g$ се акумулира у грејачу и његовом носачу ($P_{a,\ g}$), део се губи провођењем кроз шамотни носач и ка амбијенту ($P_{pr,ga}$), а највећи део представља снагу која се зрачењем преноси ка керамичкој плочи (температуре $\vartheta_p$), што се моделује топлотним отпором

$$R^T_{zr,gp} = \frac{\vartheta_g - \vartheta_p}{F\sigma_c\left(\left(\vartheta_g + 273{,}15\right)^4 - \left(\vartheta_p + 273{,}15\right)^4\right)} \tag{2.1}$$

где је F укупни фактор виђења диска керамичке плоче са паралелног идентичног диска којим се моделује грејач и са вертикалног зида носача грејача. Овај фактор виђења се може одредити на следећи начин ($g$ – површ грејача, $z$ – површ вертикалног зида и $p$ – површ керамичке плоче) – за затворену површ коју чине грејач, зид и плоча важи:

$$F_{pp} + F_{pz} + F_{pg} = 1 \tag{2.2}$$

Имајући у виду да је фактор виђења $F_{pp} = 0$ (равна површ), фактор виђења са кога се виде површи зида и грејача (они по услову задатка представљају изотермичку површ) са површи керамичке плоче једнак је $F_{p\text{-}zг} = 1$. Фактор виђења са кога се са површи зида и грејача види површ керамичке плоче једнак

$$F = F_{zg-p} = \frac{S_p}{S_p + S_z} F_{p-zg} = \frac{S_p}{S_p + S_z}\, 1 = \frac{S_p}{S_p + S_z} \tag{2.3}$$

Део те снаге ће се акумулирати у керамичкој плочи ($P_{a,\ p}$), део се губи провођењем преко површи керамичке површи шпорета ($P_{pr,pa}$), а највећи део представља снагу која ће загревати шерпу и њен садржај ($P_{zag}$). Због постојања значајне контактне отпорности између дна шерпе и рингле ($R^T_{kont}$), на овом отпору ће се јавити пад температуре, односно температура шерпе ће бити нижа од температуре површи рингле. Део снаге пренете ка шерпи ($P_{zag}$) ће се изгубити услед преноса топлоте са површине шерпе струјањем ка амбијенту ($P_{str,amb}$). Вода и шерпа, топлотних капацитета $C^T_{vode}$ и $C^T_{šerpe}$, такође, представљају изотермичку запремину температуре $\vartheta_{vode}$.

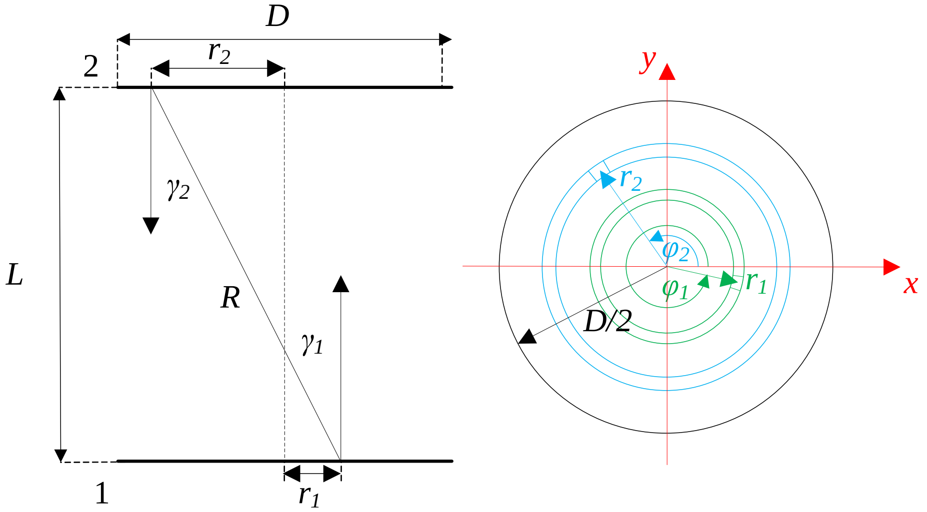
**3. Задатак**

Фактор виђења између површи (1) и (2) одређује се по формули:

$$F_{12} = \frac{1}{S_1}\int_{S_1}\int_{S_2} \frac{\cos\gamma_1 \cos\gamma_2}{R^2\,\pi}\, dS_1 dS_2 \tag{3.1}$$

Углови $\gamma_1$ и $\gamma_2$ су углови са паралелним крацима, па важи $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, одакле произилази

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos^2\gamma}{R^2 \pi} dS_1 dS_2 \tag{3.2}$$




Слика 3.1

На слици 3.1 приказани су погледи на дискове са стране и одозго. Плава кружница полупречника $r_2$ се налази на диску 2, док се зелена кружница полупречника $r_1$ налази на диску 1.

За угао $\gamma$ важи

$$\cos\gamma = \frac{L}{R} \tag{3.3}$$

Потег $R$ се може одредити као

$$R^2 = L^2 + d^2 \tag{3.4}$$

где је $d$ растојање између посматраног делића кружнице полупречника $r_2$ и пројекције делића кружнице полупречника $r_1$ на раван диска 2. Ово растојање је једнако растојању између две тачке у поларном координатном систему са координатама ($r_1$, $\varphi_1$) и ($r_2$, $\varphi_2$):

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{3.5}$$

Израз (3.5) се изводи полазећи од познатог израза за растојање у Декартовом координатном систему (када посматрани делићи имају координате ($x_1$, $y_1$) и ($x_2$, $y_2$)):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{3.6}$$

и коришћењем формула за трансформацију координата из Декартовог у поларни координатни систем:

$$\begin{gathered}(x_1, y_1) \Rightarrow (r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1)\\ (x_2, y_2) \Rightarrow (r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Заменом (3.7) у (3.6) добија се израз за растојање у поларном координатном систему:

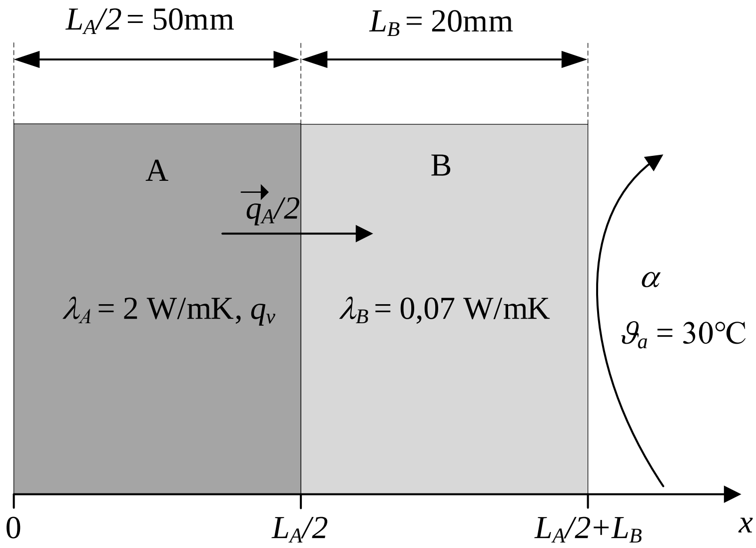
$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(r_1\cos\varphi_1 - r_2\cos\varphi_2)^2 + (r_1\sin\varphi_1 - r_2\sin\varphi_2)^2} = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}\\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Заменом (3.5) и (3.3) у (3.4) добија се

$$F_{12} = \frac{4}{D^2\pi} \int_{r_1=0}^{D/2} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \int_{r_2=0}^{D/2} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \frac{L^2}{(L^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2))^2\,\pi} r_2 d\varphi_2 dr_2 r_1 d\varphi_1 dr_1 \tag{3.9}$$

**4. Задатак**

Посматрани зид се може поделити ветрикалном равни сиаметрије кроз средину слоја А на два једнака дела, па се при даљем разматрању може посматрати само половина зида (слика 4.1). На основу симетрије, површ која дели слој А пола представља адијабадску површ, одакле следи да ће максимална температура слоја А бити на тој површи, односно на средини дела А.




Слика 4.1

Укупна генерисана снага у слоју A се може израчунати на следећи начин:

$$q_A = \iiint_{V_A} q_V \cdot dV = q_V \cdot \iiint_{V_A} dV = q_V \cdot V_A = q_V \cdot S \cdot L_A \tag{4.1}$$

Због симетрије половина снаге генерисане у слоју A се у стационарном стању преноси струјањем на ваздух на десној граничној површи (температуре $\vartheta_2$):

$$\frac{q_A}{2} = \frac{1}{2} \cdot q_V \cdot S \cdot L_A = \alpha_0 \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_a}{20}\right)^{0,25} \cdot S \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_a) \tag{4.2}$$

Из (4.2) се може израчунати температура граничне површи у додиру са ваздухом:

$$\vartheta_2 = \vartheta_a + \left(\frac{q_V L_A 20^{0,25}}{2\alpha_0}\right)^{0,8} = 42{,}06℃ \tag{4.3}$$

Познајући отпор преносу топлоте кроз слој B, може се израчунати температура граничне површи између слојева A и B ($\vartheta_1$):

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{q_A}{2} \cdot R_B^T \tag{4.4}$$

$$R_B^T = \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \tag{4.5}$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{1}{2} \cdot q_V \cdot L_A \cdot S \cdot \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \tag{4.6}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{2\lambda_B} = 66{,}34℃ \tag{4.7}$$

Расподела температуре у слоју A се може одредити постављањем и решавањем опште једначине температурног поља:

$$\lambda_A \cdot \Delta\vartheta + q_V = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \tag{4.8}$$

где је са Δ означен *Laplace*-ов оператор који у *Descartes*-овом координатном систему има следећи облик

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.9}$$

У стационарном стању температуре се не мења у времену, те важи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \tag{4.10}$$

Општа једначина температурног поља за слој A у стационарном стању гласи:

$$\lambda_A \cdot \Delta\vartheta + q_V = 0 \tag{4.11}$$

$$\lambda_A \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) + q_V = 0 \tag{4.12}$$

Пошто се посматра једнодимензиони пренос топлоте важи:

$$\vartheta = \vartheta(x) = const(y, z) \tag{4.13}$$

Одакле проистиче

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \tag{4.15}$$

Заменом у (4.12) се добија:

$$\lambda_A \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + q_V = 0 \tag{4.16}$$

Њено опште решење је:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_1 \cdot x + C_2 \tag{4.17}$$

где су $C_1$ и $C_2$ интеграционе константе.

Интеграционе константе одређују се на основу граничних услова:

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0_+) = 0 \tag{4.18}$$

$$\vartheta(\frac{L_{A-}}{2}) = \vartheta(\frac{L_{A+}}{2}) \tag{4.19}$$

Из услова (4.18) се добија:

$$-\frac{q_V \cdot 0}{\lambda_A} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \tag{4.20}$$

Користећи услов (4.19) може се одредити вредност $C_2$:

$$-\frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_2 = \vartheta_1 \tag{4.21}$$

$$C_2 = \vartheta_1 + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} \tag{4.22}$$

Максимална температура у слоју А добија се као:

$$\vartheta_{max} = \vartheta(x = 0) = C_2 = \vartheta_1 + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} = 67{,}41℃ \tag{4.23}$$

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

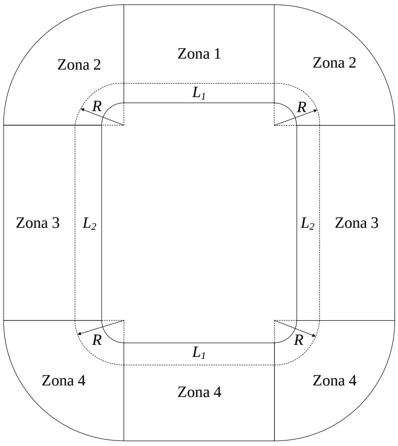
**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

---

**Други колоквијум (први термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 150 минута*
*Укупан број поена износи 11* 27. 12. 2021.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

1. Посматра се један навојак *shell type* трансформатора (слика) у вертикалној равни. Познате су температуре уља у зонама 1 и 2 – $\vartheta_{u2}$, у зони 3 – $\vartheta_{u3}$ и у зони 4 – $\vartheta_{u4}$, при чему се може сматрати да су оне мало променљиве по свакој зони. Навојак се састоји од више концентричних навојака, од којих је један приказан на слици испрекиданим линијом. Губици у проводнику се генеришу запреминском густином $q_v$. Специфична топлотна проводност материјала проводника износи $\lambda_p$, а његове изолације $\lambda_{iz}$. Попречни пресек проводника износи $S$, дебљина изолације $\delta_{iz}$, а обим попречног пресека према околном уљу за хлађење $O$. Део навојка, означен на слици као зона 1, се слабо хлади и може се сматрати да у том делу нема преноса топлоте ка уљу. У зонама 2, 3 и 4 коефицијенти преласка топлоте струјањем су једнаки $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\alpha_4$, респективно. Поставити скуп од четири диференцијалне једначине које потпуно описују систем и написати њихово опште решење. Написати и граничне услове за одређивање 8 интеграционих константи. Написати израз према коме се може израчунати средња температура навојка приказаног испрекиданом линијом, при чему није потребно решавати интеграле. Занемарити провођење топлоте ка суседним проводницима, као и пренос топлоте зрачењем. (3п)




2. Један трансформатор са ODAF хлађењем се хлади помоћу 4 компактна хладњака чија је укупна номинална снага хлађења 30% већа од снаге укупних губитака у трансформатору. Може се сматрати да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun}$ = 85°C и $\vartheta_{hun}$ = 78,9°C, температуре хладног и топлог ваздуха: $\vartheta_{hvn}$ = 40°C и $\vartheta_{tvn}$ = 60,8°C, номинална снага $P_{hn}$ = 220kW, проток уља. Колико ће износити температура горњег уља, средња температура намотаја и температура најтоплије тачке изолације при номиналном оптерећењу трансформатора при температури амбијента 20°C. Познате су вредности разлике средње температуре намотаја и средње температуре уља ($g_n$ = 17 K) и фактора најтоплије тачке ($H$ = 1,3). Сматрати да је коефицијент преласка топлоте хладњака једнак ономе који се има при горе специфицираним номиналним условима рада хладњака. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру (2.5п)

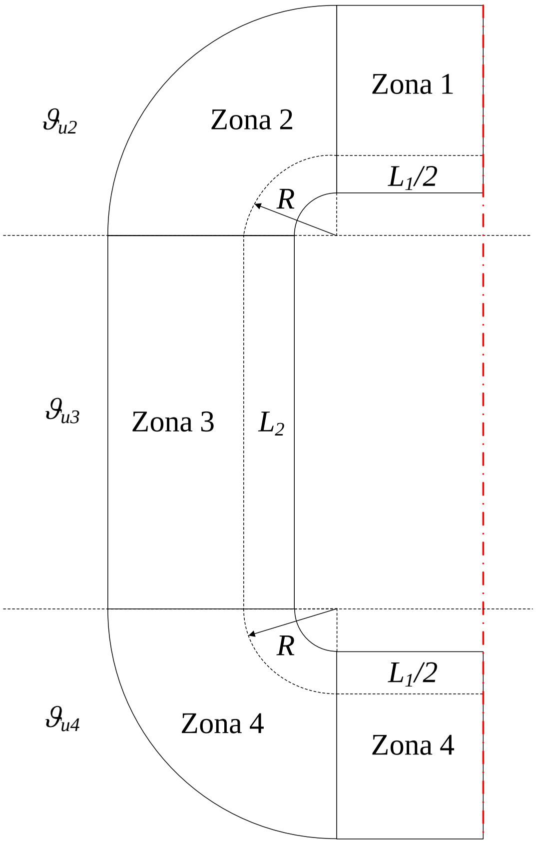
3. За један хладњака намењен за хлађење полупроводничких компоненти енергетских претварача дати квалитативну промену вредности укупног топлотног отпора у зависности од дужине хладњака. Промену приказати: 1) за две различите снаге преноса топлоте у случају природног струјања ваздуха, б) за две различите брзине струјања ваздуха, за случај принудног струјања ваздуха. Који параметар којим се директно описује пренос топлоте (посматрати провођење и струјање, односно занемарити зрачење) изазива ове промене топлотног отпора и на које начине (одговор дати за случајеве 1) и 2)). (2п)

4. Један високонапонски електроенергетски кабл повезује једну трансформаторске станицу у приградској области и једну у центру града и између којих постоји удаљеност од преко 10 километара. Пре пројекта полагања кабла и одређивања његовог пресека врши се дефинисање трасе кабла. Због чега је, са термичке стране, потребно анализирати трасу – навести најмање пет елемената у вези са трасирањем кабла и одређивањем потребног пресека кабла. (2п)

5. Навести 4 параметра амбијенталних услова који утичу на загревање електроенергетске компоненте постављене у слободан простору. (2п)

**1. Задатак**

На основу геометрије и расподеле коефицијента преноса топлоте струјањем, закључује са да навојак има једну раван симетрије (која пролази кроз средину зоне 1 и хоризонталне зоне 4), па се у даљим разматрањима посматра само једна половина навојка (слика 1.1). Такође, на основу симетрије, закључује се да су граничне површи у равни симетрије адијабатске, односно да кроз њих нема преноса топлоте провођењем.



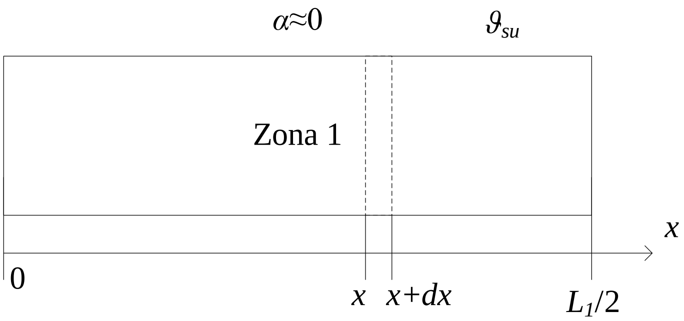

Слика 1.1

Тражени систем од четири диференцијалне једначине, односи се на једначине којима се описује промена температуре дуж једног проводника навојка у свакој од четири дефинисане зоне.

Математички исказ биланса снага, за елементарни део проводника у зони 1, дужине d$x$, на растојању $x$ (слика 1.2), где је координатни почетак $x$-осе на граничној површи између зона 1 и 2, гласи:

$$q_x + dq_{gen} = q_{x+dx} + dq_{odv} \tag{1.1}$$

где је $q_x$ снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе $x$ (на месту $x$), $dq_{gen}$ снаге губитака у делу проводника дужине d$x$, а d$q_{odv}$ снага којом се топлота одводи са проводника провођењем кроз изолацију и струјањем са површине изолације која је у контактну са уљем, на дужини d$x$.




Слика 1.2

Зависност снаге провођења од координате $x$ гласи:

$$q_x = -\lambda_p \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{1.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек проводника не мења по координати $x$, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda_p \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda_p \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{1.3}$$

Израз (1.3) важи само за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи са проводника провођењем кроз изолацију и струјањем са омотача делића дужине d$x$ је

$$dq_{odv} = O \cdot dx \cdot \frac{\vartheta(x) - \vartheta_{u2}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_{iz}}{\lambda_{iz}}} \tag{1.4}$$

Снага којом се генеришу губици у делићу дужине d$x$ је

$$dq_{gen} = q_v \cdot S \cdot dx \tag{1.5}$$

Уврштавањем у једначину (1.1) израза за диференцијал функције (1.3), снаге одвођења топлоте (1.4) и снаге генерисања губитака (1.5), долази се до следећег израза:

$$\lambda_p \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = O \cdot dx \cdot \frac{\vartheta(x) - \vartheta_{u2}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_{iz}}{\lambda_{iz}}} - q_v \cdot S \cdot dx \tag{1.6}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж проводника:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O \cdot \lambda_{iz}}{\lambda_p \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha \delta_{iz})} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{u2}) - \frac{q_v}{\lambda_p} \tag{1.7}$$

За део проводника у зони 1, дужине $L_1/2$ тј. за $x \in [0, L_1/2]$ (координатни почетак $x$-осе се, у овом случају, налази на граничној површи између зона 1 и 2) важи $\alpha = 0$, па једначина (1.7) постаје:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \tag{1.8}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине је:

$$\vartheta_1(x) = C_1 + C_2 x - \frac{q_v}{2 \cdot \lambda_p} \cdot x^2 \tag{1.9}$$

где $x \in [0, L_1/2]$.

Диференцијална једначина, која описује промену температуре дуж проводника у зони 2, има исти облик као и једначина(1.8):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha_2 \cdot O \cdot \lambda_{iz}}{\lambda_p \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_2 \delta_{iz})} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{u2}) - \frac{q_v}{\lambda_p} \tag{1.10}$$

где је $x \in [0, \frac{1}{2} R\pi]$ координата у цилиндричном координатном систему, а координатни почетак $x$-осе се, у овом случају, налази на граничној површи између зона 2 и 3. Опште решење диференцијалне једначине (1.10) гласи:

$$\vartheta_2(x) = C_3 e^{mx} + C_4 e^{-mx} + \vartheta_{u2} + \frac{q_v \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_2 \delta_{iz})}{\alpha_2 \cdot O \cdot \lambda_{iz}} \tag{1.11}$$

где је $m$ параметар одређен изразом:

$$m^2 = \frac{\alpha_2 \cdot O \cdot \lambda_{iz}}{\lambda_p \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_2 \delta_{iz})} \tag{1.12}$$

Слична ствар важи и за део проводника у зони 3, само се коефицијент преласка топлоте струјањем ($\alpha_3$) и дужина ($L_2$) разликују. У овом случају, диференцијална једначина гласи:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha_3 \cdot O \cdot \lambda_{iz}}{\lambda_p \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_3 \delta_{iz})} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{u3}) - \frac{q_v}{\lambda_p} \tag{1.13}$$

где $x \in [0, L_2]$, а координатни почетак $x$-осе се налази на граничној површи између зоне 3 и зоне 4. Опште решење диференцијалне једначине (1.13) гласи:

$$\vartheta_3(x) = C_5 e^{nx} + C_6 e^{-nx} + \vartheta_{u3} + \frac{q_v \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_3 \delta_{iz})}{\alpha_3 \cdot O \cdot \lambda_{iz}} \tag{1.14}$$

где је $n$ параметар одређен изразом:

$$n^2 = \frac{\alpha_3 \cdot O \cdot \lambda_{iz}}{\lambda_p \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_3 \delta_{iz})} \tag{1.15}$$

Коначно, за део проводника у зони 4, коефицијент преласка топлоте струјањем је $\alpha_4$, а дужина проводника је $\frac{L_1}{2} + \frac{1}{2} R\pi$. У овом случају, диференцијална једначина гласи:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha_4 \cdot O \cdot \lambda_{iz}}{\lambda_p \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_4 \delta_{iz})} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{u4}) - \frac{q_v}{\lambda_p} \tag{1.16}$$

где $x \in [0, \frac{L_1}{2} + \frac{1}{2} R\pi]$, а координатни почетак $x$-осе се налази на граничној површи зоне 4 која се поклапа са равни симетрије. Опште решење диференцијалне једначине (1.16) гласи:

$$\vartheta_4(x) = C_7 e^{px} + C_8 e^{-px} + \vartheta_{u4} + \frac{q_v \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_4 \delta_{iz})}{\alpha_4 \cdot O \cdot \lambda_{iz}} \tag{1.17}$$

где је $p$ параметар одређен изразом:

$$p^2 = \frac{\alpha_4 \cdot O \cdot \lambda_{iz}}{\lambda_p \cdot S \cdot (\lambda_{iz} + \alpha_4 \delta_{iz})} \tag{1.18}$$

На крају, потребно је написати и осам граничних услова, на основу којих је могуће одредити вредности непознатих интеграционих константи ($C_1 - C_8$):

1. Први гранични услов се поставља за адијабатску površ у зони 1 ($x = L_1/2$):

$$-\lambda_p \cdot \left(\frac{d\vartheta_1}{dx}\right)_{x=L_1/2} = 0 \tag{1.19}$$

2. Други гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 1 и 2:

$$\vartheta_1(x = 0) = \vartheta_2\left(x = \frac{1}{2}R\pi\right) \tag{1.20}$$

3. Трећи гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 1 и 2, од ње и ка њој:

$$-\lambda_p \left(\frac{d\vartheta_1}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda_p \left(\frac{d\vartheta_2}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}R\pi} \tag{1.21}$$

4. Четврти гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 2 и 3:

$$\vartheta_2(x = 0) = \vartheta_3(x = L_2) \tag{1.22}$$

5. Пети гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 2 и 3, од ње и ка њој:

$$-\lambda_p \left(\frac{d\vartheta_2}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda_p \left(\frac{d\vartheta_3}{dx}\right)_{x=L_2} \tag{1.23}$$

6. Шести гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 3 и 4:

$$\vartheta_3(x = 0) = \vartheta_4\left(x = \frac{L_1}{2} + \frac{1}{2}R\pi\right) \tag{1.24}$$

7. Седми гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 3 и 4, од ње и ка њој:

$$-\lambda_p \left(\frac{d\vartheta_3}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda_p \left(\frac{d\vartheta_4}{dx}\right)_{x=\frac{L_1}{2}+\frac{1}{2}R\pi} \tag{1.25}$$

8. Осми гранични услов се поставља за адијабатску површ у зони 4 ($x = 0$):

$$-\lambda_p \cdot \left(\frac{d\vartheta_4}{dx}\right)_{x=0} = 0 \tag{1.26}$$

Средња температура навојка рачуна се као

$$\vartheta_{sr} = \frac{1}{L}\int_L \vartheta(x)dx = \frac{1}{L}\left[\int_{x=0}^{L_1/2} \vartheta_1(x)dx + \int_{x=0}^{R\pi/2} \vartheta_2(x)dx + \int_{x=0}^{L_2} \vartheta_3(x)dx + \int_{x=0}^{(L_1+R\pi)/2} \vartheta_4(x)dx\right] \tag{1.27}$$

$$L = \frac{L_1}{2} + \frac{R\pi}{2} + L_2 + \frac{L_1 + R\pi}{2} \tag{1.28}$$

**2. Задатак**

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_{p,n}S(\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}}\right)} \tag{2.1}$$

Применом израза (2.1) на номиналне податке хладњака се добија:

$$\Delta\vartheta_{izl,n} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 18{,}1\text{°C} \tag{2.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul,n} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 45\text{°C} \tag{2.3}$$

Заменом ових вредности у израз (2.1), уз $P_{hn} = 220kW$ добија се да је:

$$K_{p,n}S = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})} = 7448{,}52\frac{W}{\text{°C}} \tag{2.4}$$

За уље и воду можемо написати следећа два израза:

$$P_{hn} = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{2.5}$$

$$P_{hn} = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{2.6}$$

Одавде добијамо:

$$\rho_u Q_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}} = 36065{,}57\frac{W}{\text{°C}} \tag{2.7}$$

$$\rho_v Q_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}} = 10576{,}92 \frac{W}{℃} \tag{2.8}$$

Номинална снага хладњака је за 30% већа од номиналне снаге губитака, па је расхладна снага сваког од хладњака при номиналном оптерећењу трансформатора једнака $P_h = P_{hn} / 1{,}3 = 169{,}23$ kW. Сада, за ову снагу хлађења могу се написати изрази аналогни изразима (2.1), (2.5) и (2.6):

$$P_h = \frac{K_p S(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}}\right)} \tag{2.9}$$

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \tag{2.10}$$

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{2.11}$$

где је $K_pS = K_{p,n}S = 7448{,}52$ W/°C. Температура хладног ваздуха једнака је амбијенталној ($\vartheta_{hv} = 20$°C), па се на основу израза (2.11) добија да је:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 36℃ \tag{2.12}$$

Из једначине (2.10) се добија:

$$\vartheta_{tu} = \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} + \vartheta_{hu} = 4{,}69℃ + \vartheta_{hu} \tag{2.13}$$

Заменом израза (2.12) и (2.13) у (2.9) добија се:

$$\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - 36}{4{,}69 + \vartheta_{hu} - 20}\right) = \frac{K_p S}{P_h}(\vartheta_{hu} - 36 - 4{,}69 - \vartheta_{hu} + 20) \tag{2.14}$$

$$\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - 36}{\vartheta_{hu} - 15{,}31}\right) = 0.044 \cdot (-20{,}69) \tag{2.15}$$

Решење једначине (2.15) је $\vartheta_{hu} = 49{,}93$°C, па су тражене температуре једнаке:

$$\vartheta_{gu} = \vartheta_{tu} = \vartheta_{hu} + 4{,}69 = 54{,}62℃ \tag{2.16}$$

$$\vartheta_{nam,a} = \vartheta_{u,sr} + g_n = \frac{\vartheta_{hu} + \vartheta_{tu}}{2} + g_n = 69{,}28℃ \tag{2.17}$$

$$\vartheta_{hs} = \vartheta_{tu} + H \cdot g_n = 76{,}72℃ \tag{2.18}$$

**3. Задатак**

Предавања, часови 16-18, страна 5 (почетак текста испод слике 50) и 6 (закључно са текстом пасуса испод слике 53).

**4. Задатак**

Загревање кабла, полазећи од номиналне струје заштитне компоненте, која се одређује према процењеној једновремено-максималној снази, одређено је критичном деоницом на траси кабла. Елементи у вези са трасирањем кабла и одређивањем потребног пресека:

- Начин полагања (на пример, а) у кабловском каналу, унутар трансформаторске станице, б) у рову у слободном простору, в) у бетонским каналицама, при проласку испод саборађајница)
- Термичка проводност тла
- Термички контактни отпор између кабла и тла
- Исушивање слоја земљишта око кабла
- Додавање материјала како бу се смањио контактни термички отпор и топлотни отпор провођењу топлоте у околину
- Температура (амбијента или тла)
- Укрштање са топловодом
- Додавање материјала погодних топлотно изолационуих карактеристика како би се смањио утицај топловода (пораст температуре тла око кабла и исушивање тла)
- Уважавање временски променљивог оптерећења

## 5. Задатак

1. Температура амбијента
2. Сунчево зрачење
3. Брзина ветра
4. Атмосферске падавине (киша, снег)

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Испит / други колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута / 150 минута* 24. 1. 2022.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

1. Извести израз за снагу којом се енергија размењује зрачењем између унутрашње сфере пречника $D_1$ и спољашње сфере пречника $D_2$, које се налазе на температурама $T_1$ и $T_2$ и чије површи имају својства идеално сивог тела, коефицијента сивоће $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, респективно. Апсорпциона својства су карактерисана коефицијентима апсорпције, који су једнаки коефицијентима сивоће (емисивностима). Какав се ефекат постиже постављањем сферог екрана пречника $D_3$ између сфера 1 и 2? Коефицијент сивоће екрана износи $\varepsilon_3$. Све три сфере су концентричне. (2п/0п)

2. Приказати дијаграм промене температуре у трансформатору - уља у намотајима, уља у радијатору и намотаја, укључујући и најтоплију тачку намотаја. Приказ дати за трансформатор са два намотаја различитих висина (почетак намотаја се налази на истој висини), различитих губитака и протока уља (различити су и вертикални градијенти температура) у сваком од њих, различитих градијената температуре намотај – уље у намотају и различитих фактора најтоплије тачке. До мешања уља из намотаја долази на координати висине вишег намотаја. На слици квалитативно приказати промене које настају уколико би проток уља кроз један намотај за $\Delta Q$ био већи, а кроз други намотај за за $\Delta Q$ мањи од претпостављеног. Сматрати да се при промени протока за $\Delta Q$ не мењају температура уља на уласку у намотаје, као ни температура помешаног уља (температура у термометарском џепу). Такође, сматрати да се не мењају ни следеће вредности за сваки од намотаја: губици, разлика средње температуре намотаја и уља у намотају и фактор најтоплије тачке намотаја. (2п/2,5п)

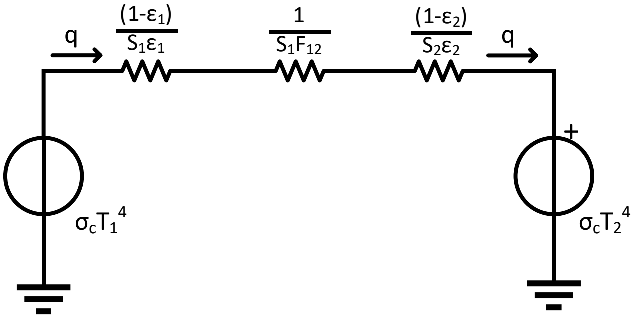
3. Један трансформатор са ODAF хлађењем се хлади компактним хладњаком. Може се сматрати да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun} = 85°C$ и $\vartheta_{hun} = 78{,}9°C$, температуре хладног и топлог ваздуха: $\vartheta_{hvn} = 40°C$ и $\vartheta_{tvn} = 60{,}8°C$. Одредити номиналну снагу хладњака, изражену као мултипл номиналних губитака у трансформатору, која ће обезбеди довољно ниску температуру уља тако да температура најтоплије тачке, при номиналном оптерећењу трансформатора при температури амбијента 20°C, не пређе дозвољен пораст у односу на амбијент од 78 K. Познате су вредности разлике средње температуре намотаја и средње температуре уља ($g_n = 17$ K) и фактора најтоплије тачке ($H = 1{,}3$). Сматрати да је коефицијент преласка топлоте хладњака једнак ономе који се има при номиналним условима рада хладњака. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру. (2,5п/3п)

4. Посматра се хладњак са 10 ребара којим је потребно са тела одвести снагу губитака од $P_g = 30$ W. Једно ребро је дужине $L = 100$ mm и попречног пресека облика правоугаоника $a \times b = 50$ mm x 10 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре $\vartheta_a = 30°C$ износи $\alpha = 8$ W/m$^2$K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи $\lambda = 237$ W/mK. Између тела које се хлади и ребра постоји контактна отпорност $R_{th,c} = 0.1$ K/W. Одредити за колико је могуће смањити дужину ребара ако се помоћу термалне пасте смањи контактна отпорност за 90%, тако да температура површине тела које се хлади остане иста. При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси са ваздуха једнака нули. Сматрати да је снага одвођења топлоте са основе хладњака, као и површина између ребара занемарљиво мала. (2,5п/3п)

5. Једножилни кабл пресека бакра $S_{Cu} = 95$ mm$^2$ ($c_{Cu} = 385$ J/(kg°C), $\rho_{Cu} = 8933$ kg/m$^3$) са PVC изолацијом дебљине изолације $\delta_{iz} = 1$ mm ($\lambda_{PVC} = 0{,}16$ W/(m K)) положен је у тло специфичне топлотне отпорности $\rho_z$=2,5 (m K)/W. Занемарити топлотни капацитет тла. При израчунавању укупног топлотног отпора сматрати да се за "удаљену референтну површ ", на којој је температура једнака $\vartheta_z$=20°C, може узети цилиндар ваљка пречника $D_{ref}$=1000 mm. Одредити временску константу промене температуре бакра током прелазног процеса који настаје услед промене струје кроз кабл. Промена струје је таква да се може занемарити промена промена електричне проводности бакра услед промене температуре. (2п/2,5п)

**<u>1. Задатак</u>**

Случај без екрана:

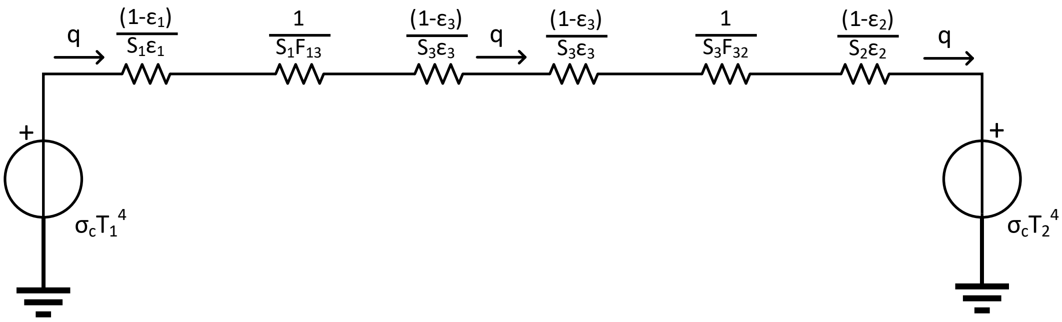



Слика 1.1

$$S_1 = \frac{\pi\, {D_1}^2}{4}, S_2 = \frac{\pi\, {D_2}^2}{4}, F_{12} = 1 \tag{1.1}$$

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4)\, S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_1}{S_2}} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_1}{S_2}}\left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right) S_1 \tag{1.2}$$

Случај са екраном:




Слика 1.2

$$F_{12} = 1, S_3 = \frac{\pi\, {D_3}^2}{4}, F_{32} = 1 \tag{1.3}$$

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{13} S_1} + \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1}{F_{32} S_3} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4)\, S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{S_1}{S_3} - \frac{S_1}{S_3} + \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{S_1}{S_3} - \frac{S_1}{S_3} + \frac{S_1}{S_3} + \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{S_1}{S_2} - \frac{S_1}{S_2}} \tag{1.4}$$

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + 2\left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_1}{S_3} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)\frac{S_1}{S_2}}\left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right) S \tag{1.5}$$

**<u>2. Задатак</u>**

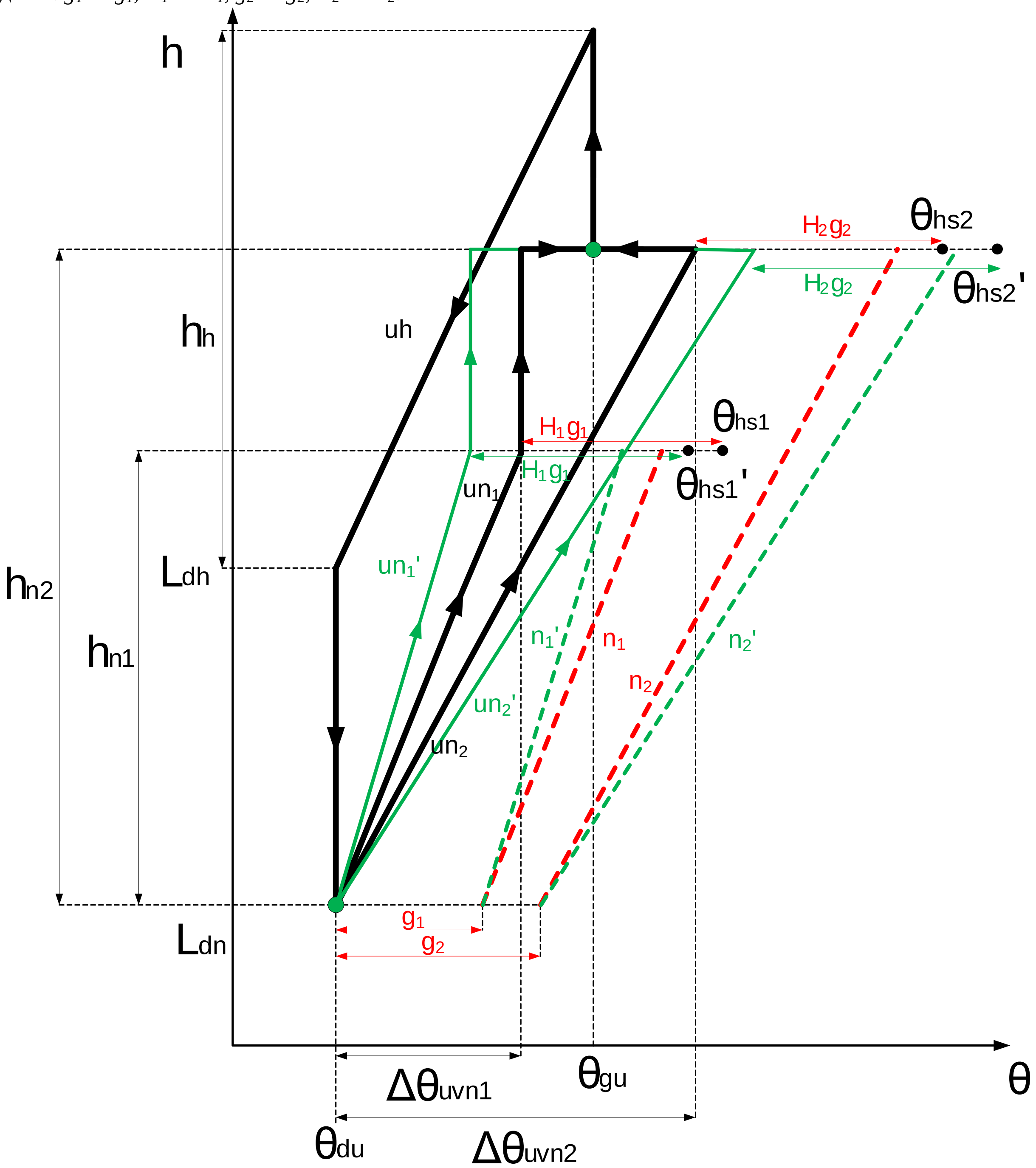
На слици 2.1, црним и црвеним линијама, приказан је дијаграм промене температуре у трансформатору за неке претпостављене вредности протока уља кроз намотаје (протоци су такви да се разликују порасти температура уља у намотајима). Према услову задатка, при разматрању ефекта промене протока (вредност једног протока (нпр. кроз први намотај) се повећава за $\Delta Q$, а другог смањује за $\Delta Q$), сматра се да се температура помешаног уља (температура у термометарском џепу) и температура уља на уласку у намотаје не мењају. Ове температуре су на дијаграму (слика 2) приказане као зелене тачке. Такође, по услову задатка, задржавају се и вредности разлике средње температуре намотаја и средње температуре уља у намотају ($g_i$), као и фактора најтоплије тачке.

Градијент уља по висини сваког од намотаја пропорционалан је са снагом губитака (по услову задатка снага губитака је иста у оба случаја), а обрнуто пропорционалан протоку, па важи (за случај повећања протока кроз први и смањења протока кроз други намотај):

$$\frac{\Delta\theta'_{uvn1}}{\Delta\theta_{uvn1}} = \frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{Q_1}{Q_1 + \Delta Q} < 1 \tag{2.1}$$

$$\frac{\Delta\theta'_{uvn2}}{\Delta\theta_{uvn2}} = \frac{Q_2}{Q'_2} = \frac{Q_2}{Q_2 - \Delta Q} > 1 \tag{2.2}$$

Промене које настају због промене протока приказане су на дијаграму зеленим линијама. При конструкцији су уважени усови задатка: $g_1' = g_1$, $H_1' = H_1$, $g_2' = g_2$, $H_2' = H_2$.




Слика 2.1

**3. Задатак**

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_{p,n} S(\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}}\right)} \tag{3.1}$$

Применом израза (3.1) на номиналне податке хладњака се добија:

$$\Delta\vartheta_{izl,n} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 18{,}1\,^{\circ}\mathrm{C} \tag{3.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul,n} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 45\,^{\circ}\mathrm{C} \tag{3.3}$$

Заменом ових вредности у израз (3.1), добија се да је:

$$K_{p,n} S = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})} = 0{,}03386 \cdot P_{hn} \tag{3.4}$$

За уље и воду можемо написати следећа два израза:

$$P_{hn} = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{3.5}$$

$$P_{hn} = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{3.6}$$

Одавде добијамо:

$$\rho_u Q_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}} = 0{,}16393 \cdot P_{hn} \tag{3.7}$$

$$\rho_v Q_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}} = 0{,}04808 \cdot P_{hn} \tag{3.8}$$

При температури амбијенталног ваздуха од 20°C и номиналном оптерећењу трансформатора расхладна снага хладњака једнака је номиналној снази губитака у трансформатору $P_h = P_{gub}$. Сада, за ову снагу хлађења могу се написати изрази аналогни изразима (3.1), (3.5) и (3.6):

$$P_h = \frac{K_p S(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}}\right)} \tag{3.9}$$

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \tag{3.10}$$

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{3.11}$$

где је $K_pS = K_{p,n}S = 0{,}03386 \cdot P_{hn}$. Температура хладног ваздуха једнака је амбијенталној ($\vartheta_{hv}$ = 20°C), па се на основу израза (3.11) добија да је:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_{gub}}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = \frac{P_{gub}}{0{,}04808 \cdot P_{hn}} + 20°\text{C} = \frac{20{,}8°\text{C}}{x} + 20°\text{C} \tag{3.12}$$

где је $x$ тражени мултипл снаге номиналних губитака ($P_{hn} = x \cdot P_{gub}$).

Температуру горњег уља трансформатора тј. температура уља на уласку у хладњак могуће је одредити на основу услова да пораст температуре најтоплије тачке не сме прећи 78 K:

$$\vartheta_{tu} = \theta_{hs} - g_n \cdot H = 75{,}9°\text{C} \tag{3.13}$$

Из једначине (3.10) се добија:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_{gub}}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 75{,}9°\text{C} - \frac{P_{gub}}{0{,}16393 \cdot P_{hn}} = 75{,}9°\text{C} - \frac{6{,}1°\text{C}}{x} \tag{3.14}$$

Заменом израза (3.12) и (3.14) у (3.9) добија се:

$$\ln\left(\frac{75{,}9°\text{C} - \frac{6{,}1°\text{C}}{x} - \frac{20{,}8°\text{C}}{x} - 20°\text{C}}{75{,}9 - 20}\right) = \frac{0{,}03386 \cdot P_{hn}}{P_{gub}}\left(75{,}9°\text{C} - \frac{6{,}1°\text{C}}{x} - \frac{20{,}8°\text{C}}{x} - 20°\text{C} - 75{,}9°\text{C} + 20°\text{C}\right) \tag{3.15}$$

$$\ln\left(\frac{55{,}9°\text{C} - \frac{26{,}9°\text{C}}{x}}{55{,}9°\text{C}}\right) = 0{,}03386 \cdot x \cdot \left(-\frac{26{,}9°\text{C}}{x}\right) \tag{3.16}$$

$$\ln\left(1 - \frac{26{,}9}{55{,}9 \cdot x}\right) = -0{,}91083 \tag{3.17}$$

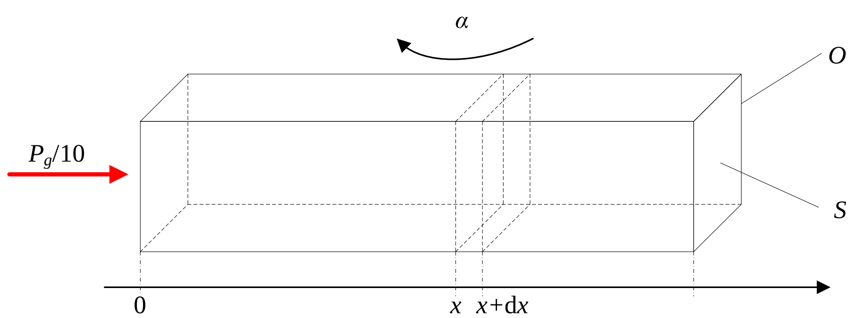
$$1 - \frac{26{,}9}{55{,}9 \cdot x} = e^{-0{,}91083} \tag{3.18}$$

$$x = \frac{26{,}9}{55{,}9 \cdot (1 - e^{-0{,}91083})} = 0{,}8 \tag{3.19}$$

Дакле, потребно је да номинална снага хладњака буде 20% мања од номиналне снаге губитака у трансформатору.

**4. Задатак**

Хладњак се састоји од 10 једнаких ребара, а пошто је снага одвођења топлоте струјањем са основе хладњака и са површина између ребара занемарљиво мала, комплетна снага губитака одводи се са површине ребара. Свако од десет ребара (једно од њих приказано је на слици 4.1) одводи по $P_g/10$. Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине d$x$, на растојању $x$ од тела на које је ребро ослоњено (слика 4.1) гласи:




Слика 4.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{4.1}$$

где је $q_x$ снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе $x$ (на месту $x$), а d$q_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине d$x$. Зависност снаге провођења од координате $x$ гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{4.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати $x$, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}dx \tag{4.3}$$

Израз (4.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине d$x$ је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.4}$$

Уврштавањем у једначину (4.1) израза за диференцијал функције (4.3) и снаге преноса топлоте струјањем (4.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{4.7}$$

где је $m$ параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{4.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

1. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$:

$$-\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P_g}{10} \tag{4.9}$$

2. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре $\vartheta_a$. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{4.10}$$

На основу израза (4.7), (4.9) и (4.10) може се написати:

$$-\lambda \cdot S \cdot (C_1 m - C_2 m) = \frac{P_g}{10} \tag{4.11}$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \tag{4.12}$$

Из једначине (4.12) добија се

$$C_2 = C_1 e^{2mL} \tag{4.13}$$

Заменом (4.13) у (4.11) добија се

$$-\lambda \cdot S \cdot m \cdot (C_1 - C_1 e^{2mL}) = \frac{P_g}{10} \tag{4.14}$$

$$C_1 = \frac{P_g}{10\lambda S m(e^{2mL} - 1)} \tag{4.15}$$

$$C_2 = \frac{P_g e^{2mL}}{10\lambda S m(e^{2mL} - 1)} \tag{4.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{P_g}{10\lambda S m(e^{2mL} - 1)}e^{mx} + \frac{P_g e^{2mL}}{10\lambda S m(e^{2mL} - 1)}e^{-mx} + \vartheta_a \tag{4.17}$$

Температура базиса ребра на координати $x = 0$ је због усвојене претпоставке са почетка задатка једнака температури основе хладњака:

$$\vartheta_o = \vartheta(x = 0) = \frac{P_g}{10\lambda S m(e^{2mL} - 1)} + \frac{P_g e^{2mL}}{10\lambda S m(e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a = \frac{P_g(e^{2mL} + 1)}{10\lambda S m(e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a \tag{4.18}$$

За случај без термалне пасте ($L$ = 100 mm) температура површи тела које се хлади једнака је:

$$\vartheta_p = \vartheta_o + P_g R_{th} = \frac{P_g(e^{2mL}+1)}{10\lambda Sm(e^{2mL}-1)} + \vartheta_a + P_g R_{th} = 146.97℃ \tag{4.19}$$

У случају када се између тела и хладњака постави термална паста важи

$$\vartheta_p = 151,33℃ = \frac{P_g(e^{2mL_{tp}}+1)}{10\lambda Sm(e^{2mL_{tp}}-1)} + \vartheta_a + 0,1 \cdot P_g R_{th} \tag{4.20}$$

Решавањем једначине (4.20) добија се нова дужина хладњака $L_{tp}$ = 91,9 mm тј. могуће је смањити дужину ребара за 8,1%.

**5. Задатак**

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10.998 \approx 11\ mm, \tag{5.1}$$

па је спољашњи пречник једножилног кабла:

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11 + 2 = 13mm \tag{5.2}$$

Укупни подужни топлотни отпор преласку топлоте износи

$$R_l^T = R_{prov,PVC}^T + R_{prov,tlo}^T = \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{\rho_z}{2\pi} ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) = 1,8941\ Km/W \tag{5.3}$$

Укупни подужни топлотни капацитет износи

$$C_l^T = \rho_{Cu}\, c_{Cu}\, S_{Cu} = 328,91\ J/(Km) \tag{5.3}$$

Временска константа

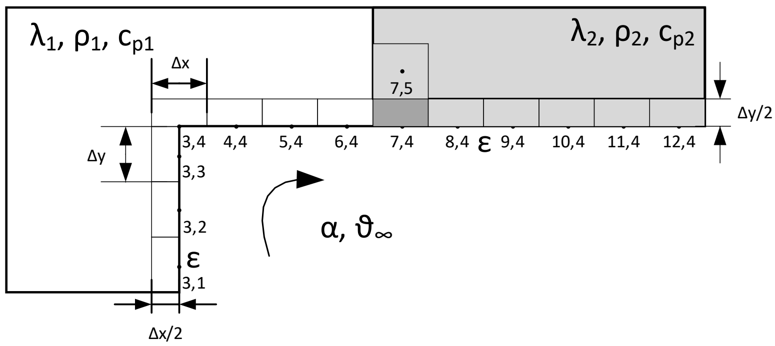
$$\tau = R_l^T\, C_l^T = 10,38\ min \tag{5.3}$$

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Испит / други колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута / 150 минута* 14. 2. 2022.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*




1. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине на координати (7,4). При постављању израза који обухвата и временску промењљивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотне проводности материјала су $\lambda_1$ и $\lambda_2$, специфични топлотни капацитети су $c_{p1}$ и $c_{p2}$, густине $\rho_1$ и $\rho_2$ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре $\vartheta_\infty$ је $\alpha$. Димензије и положај елемента су приказани на слици. Коефицијент сивоће површи износи $\varepsilon$=1. Уважити размену топлоте зрачењем са сваким елементом, при чему се код одређивања размене топлоте између два елемента може сматрати да су они елементарни, занемарљиво малих димензија (димензија по дубини је мала). (2п/0п)

2. Приказати дијаграм промене температуре у трансформатору - уља у намотајима, уља у радијатору и намотаја, укључујући и најтоплију тачку намотаја. Приказ дати за трансформатор са два намотаја за који се разликују: висина (почетак намотаја се налази на истој висини), губици, протоци уља, вертикални градијенти температура уља у намотајима, градијенти температуре намотај – уље у намотају и фактори најтоплије тачке. До мешања уља из намотаја долази на координати висине вишег намотаја. На слици квалитативно приказати промене које настају уколико би проток уља кроз један намотај ($Q_1$) за $\Delta Q$ био већи, а кроз други намотај ($Q_2$) за $\Delta Q$ мањи од претпостављеног. Сматрати да се при промени протока за $\Delta Q$ не мењају температура уља на уласку у намотаје, температура помешаног уља (температура у термометарском џепу), губици у намотајима и фактор најтоплије тачке. Сматрати да је разлика средње температуре намотаја и уља у намотају $g$ обрнуто пропорционална протоку кроз намотај степенованом на 0.8 ($Q^{0.8}$). (2п/2,5п)

3. Један трансформатор са ODAF хлађењем се хлади компактним хладњаком. Може се сматрати да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun}$ = 85°C и $\vartheta_{hun}$ = 78,9°C, температуре хладног и топлог ваздуха: $\vartheta_{hvn}$ = 40°C и $\vartheta_{tvn}$ = 60,8°C. Одредити номиналну снагу хладњака, изражену као умножак номиналних губитака у трансформатору, која ће обезбеди довољно ниску температуру уља тако да порасти температура при номиналном оптерећењу трансформатора при температури амбијента 20°C, не пређу дозвољене вредности: најтоплије тачке $\theta_{hs}$=78 K и горњег уља $\theta_{gu}$=55 K. Познате су вредности разлике средње температуре намотаја и средње температуре уља ($g_n$ = 17 K) и фактора најтоплије тачке ($H$ = 1,3). Сматрати да је коефицијент преласка топлоте хладњака једнак ономе који се има при номиналним условима рада хладњака. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру. (2,5п/3п)

4. Једна полупроводничка компонента за коју је дозвољена температура места на коме се генеришу губици $\vartheta_{PP\ doz}$ = 150°C и топлотни отпор између места генерисања топлоте и кућишта ослоњеног на хладњак $R_{th,\ pp}$ = 0,4 K/W. Посматра се хладњак са 10 ребара, дужине сваког ребра $L$ = 100 mm и попречног пресека облика правоугаоника $a$ x $b$ = 50 mm x 10 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух износи $\alpha$ = 8 W/m$^2$K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи $\lambda$ = 237 W/mK. Између тела које се хлади и ребра постоји контактна отпорност $R_{th,c}$ = 0,1 K/W. Одредити максималну снагу губитака при којој, за температуру амбијента од $\vartheta_a$ = 30°C, ће температура полупроводника бити испод дозвољене. При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси са ваздуха једнака нули. Сматрати да је снага одвођења топлоте са основе хладњака, као и површина између ребара занемарљиво мала. (2,5п/3п)

5. Посматрајмо једножилни кабл пресека бакра $S_{Cu}$ = 95 mm$^2$ са PVC изолацијом дебљине изолације $\delta_{iz}$ = 1 mm ($\lambda_{PVC}$ = 0,16 W/(m K)), у случају да се полаже директно у земљу специфичне топлотне отпорности $\rho_z$ = 2,5 (m K)/W и у случају да се око кабла поставља кошуљица сачињена од материјала $\lambda_{zk}$ = 1 W/(m K), при чему је спољашња површ кошуљице цилиндар пречника $D_k$ = 200 mm. При израчунавању укупног топлотног отпора сматрати да се за "удаљену референтну површ", на којој је температура једнака $\vartheta_z$ = 20°C, може узети цилиндар ваљка пречника $D_{ref}$ = 1000 mm. Колико у сваком од посматраних случајева, износи највиша температура изолације проводника и земље, која је од значаја за њено исушивање, у случају да је подужна снага генерисања губитака у каблу $P_{γl}$ = 30 W/m? (2п/2,5п)

**1. Задатак**

Испит 24. 11. 2018., задатак 2.

**2. Задатак**

На слици 2.1, црним и црвеним линијама, приказан је дијаграм промене температуре у трансформатору за неке претпостављене вредности протока уља кроз намотаје (протоци су такви да се разликују порасти температура уља у намотајима). Према услову задатка, при разматрању ефекта промене протока (вредност једног протока (нпр. кроз први намотај) се повећава за $\Delta Q$, а другог смањује за $\Delta Q$), сматра се да се температура помешаног уља (температура у термометарском џепу) и температура уља на уласку у намотаје не мењају. Ове температуре су на дијаграму (слика 2.1) приказане као зелене тачке. Такође, по услову задатка, задржавају се и вредности фактора најтоплије тачке.

Градијент уља по висини сваког од намотаја пропорционалан је са снагом губитака (по услову задатка снага губитака је иста у оба случаја), а обрнуто пропорционалан протоку, па важи (за случај повећања протока кроз први и смањења протока кроз други намотај):

$$\frac{\Delta\theta'_{uvn1}}{\Delta\theta_{uvn1}} = \frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{Q_1}{Q_1 + \Delta Q} < 1 \tag{4.1}$$

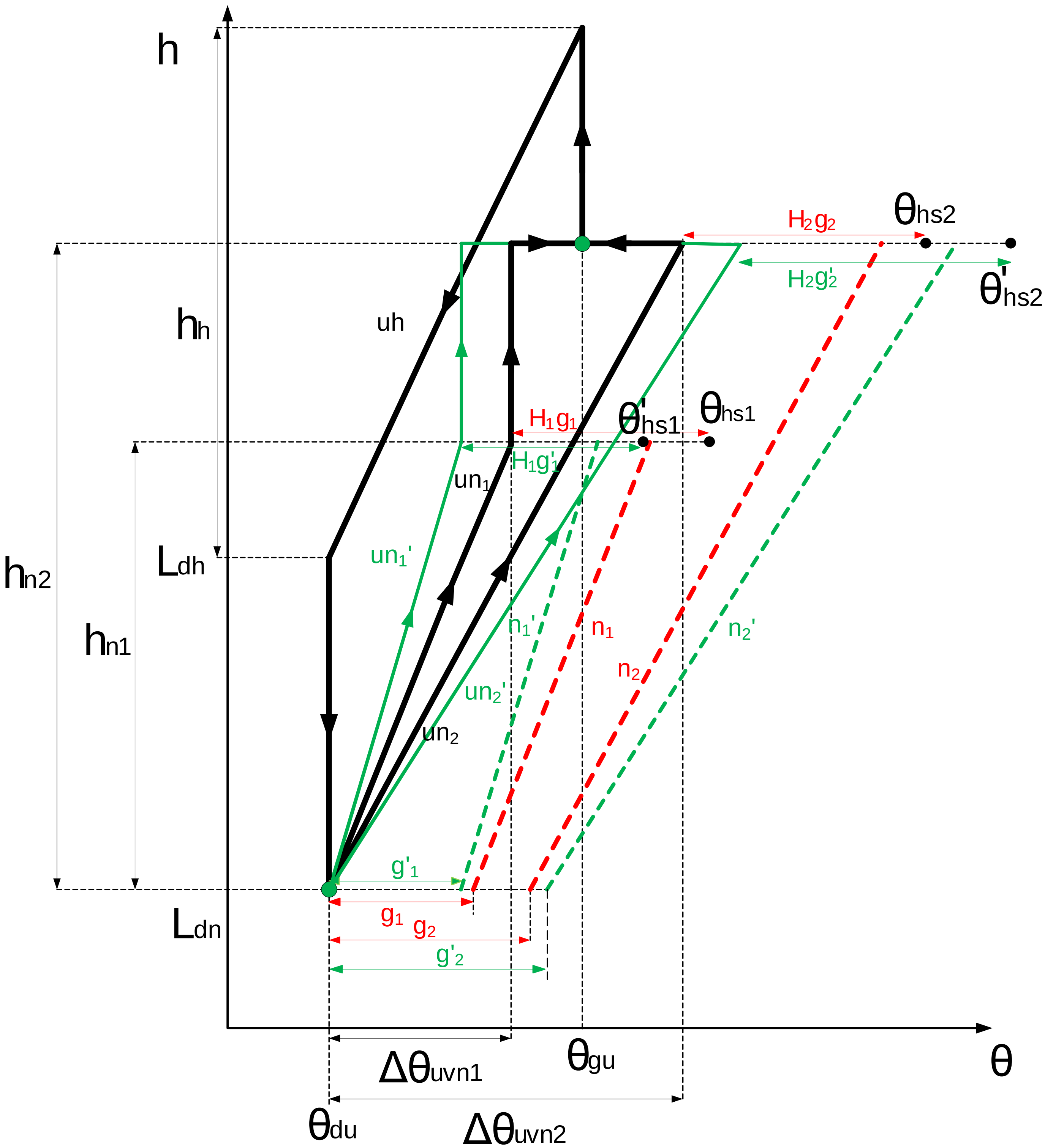
$$\frac{\Delta\theta'_{uvn2}}{\Delta\theta_{uvn2}} = \frac{Q_2}{Q'_2} = \frac{Q_2}{Q_2 - \Delta Q} > 1 \tag{4.2}$$

По услову задатка

$$g'_1 = g_1\left(\frac{Q'_1}{Q_1}\right)^{-0.8} = g_1\left(\frac{Q_1}{Q_1 + \Delta Q}\right)^{0.8} < g_1 \tag{4.3}$$

$$g'_2 = g_2\left(\frac{Q'_2}{Q_2}\right)^{-0.8} = g_2\left(\frac{Q_2}{Q_2 - \Delta Q}\right)^{0.8} > g_2 \tag{4.4}$$

Промене које настају због промене протока приказане су на дијаграму зеленим линијама. При конструкцији је уважен услов за фактор најтоплије тачке из текста задатка: $H_1' = H_1$, $H_2' = H_2$.




Слика 2.1

**3. Задатак**

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_{p,n}S(\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}}\right)} \tag{3.1}$$

Применом израза (3.1) на номиналне податке хладњака се добија:

$$\Delta\vartheta_{izl,n} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 18{,}1°\text{C} \tag{3.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul,n} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 45°\text{C} \tag{3.3}$$

Заменом ових вредности у израз (3.1), добија се да је:

$$K_{p,n}S = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})} = 0{,}03386 \cdot P_{hn} \tag{3.4}$$

За уље и воду можемо написати следећа два израза:

$$P_{hn} = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{3.5}$$

$$P_{hn} = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{3.6}$$

Одавде добијамо:

$$\rho_u Q_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}} = 0{,}16393 \cdot P_{hn} \tag{3.7}$$

$$\rho_v Q_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}} = 0{,}04808 \cdot P_{hn} \tag{3.8}$$

При температури амбијенталног ваздуха од 20°C и номиналном оптерећењу трансформатора расхладна снага хладњака једнака је номиналној снази губитака у трансформатору $P_h = P_{gub}$. Сада, за ову снагу хлађења могу се написати изрази аналогни изразима (3.1), (3.5) и (3.6):

$$P_h = \frac{K_p S(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}}\right)} \tag{3.9}$$

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \tag{3.10}$$

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{3.11}$$

где је $K_pS = K_{p,n}S = 0{,}03386 \cdot P_{hn}$. Температура хладног ваздуха једнака је амбијенталној ($\vartheta_{hv}$ = 20°C), па се на основу израза (3.11) добија да је:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_{gub}}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = \frac{P_{gub}}{0{,}04808 \cdot P_{hn}} + 20°\mathrm{C} = \frac{20{,}8°\mathrm{C}}{x} + 20°\mathrm{C} \tag{3.12}$$

где је $x$ тражени умножак снаге номиналних губитака ($P_{hn} = x \cdot P_{gub}$).

Температуру горњег уља трансформатора тј. температура уља на уласку у хладњак могуће је одредити на основу услова да пораст температуре најтоплије тачке не сме прећи $\theta_{hs}$ = 78 K и горњег уља $\theta_{gu}$ = 55 K:

$$\vartheta_{tu} = min\left(\theta_{hs} - g_n \cdot H, \theta_{gu}\right) + 20°\mathrm{C} = 75°\mathrm{C} \tag{3.13}$$

Из једначине (3.10) се добија:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_{gub}}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 75°\mathrm{C} - \frac{P_{gub}}{0{,}16393 \cdot P_{hn}} = 75°\mathrm{C} - \frac{6{,}1°\mathrm{C}}{x} \tag{3.14}$$

Заменом израза (3.12) и (3.14) у (3.9) добија се:

$$\ln\left(\frac{75°\mathrm{C} - \frac{6{,}1°\mathrm{C}}{x} - \frac{20{,}8°\mathrm{C}}{x} - 20°\mathrm{C}}{75 - 20}\right) = \frac{0{,}03386 \cdot P_{hn}}{P_{gub}}\left(75°\mathrm{C} - \frac{6{,}1°\mathrm{C}}{x} - \frac{20{,}8°\mathrm{C}}{x} - 20°\mathrm{C} - 75°\mathrm{C} + 20°\mathrm{C}\right) \tag{3.15}$$

$$\ln\left(\frac{55°\mathrm{C} - \frac{26{,}9°\mathrm{C}}{x}}{55°\mathrm{C}}\right) = 0{,}03386 \cdot x \cdot \left(-\frac{26{,}9°\mathrm{C}}{x}\right) \tag{3.16}$$

$$\ln\left(1 - \frac{26{,}9}{55 \cdot x}\right) = -0{,}91083 \tag{3.17}$$

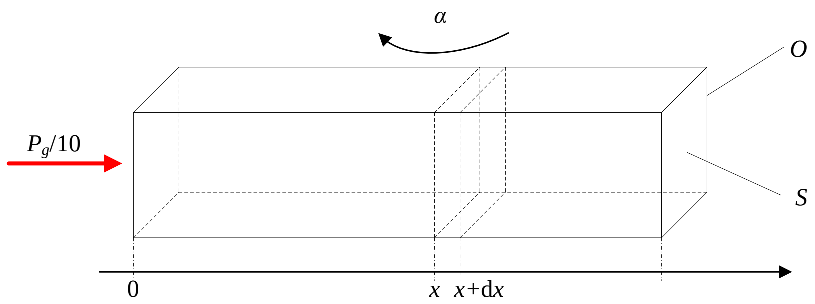
$$1 - \frac{26{,}9}{55 \cdot x} = e^{-0{,}91083} \tag{3.18}$$

$$x = \frac{26{,}9}{55 \cdot (1 - e^{-0{,}91083})} = 0.818 \tag{3.19}$$

Дакле, потребно је да номинална снага хладњака буде 18.2% мања од номиналне снаге губитака у трансформатору.

## 4. Задатак

Хладњак се састоји од 10 једнаких ребара, а пошто је снага одвођења топлоте струјањем са основе хладњака и са површина између ребара занемарљиво мала, комплетна снага губитака одводи се са површине ребара. Свако од десет ребара (једно од њих приказано је на слици 4.1) одводи по $P_g/10$. Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине d$x$, на растојању $x$ од тела на које је ребро ослоњено (слика 4.1) гласи:



Слика 4.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{4.1}$$

где је $q_x$ снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе $x$ (на месту $x$), а $dq_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине d$x$. Зависност снаге провођења од координате $x$ гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{4.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати $x$, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{4.3}$$

Израз (4.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине d$x$ је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.4}$$

Уврштавањем у једначину (4.1) израза за диференцијал функције (4.3) и снаге преноса топлоте струјањем (4.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{4.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{4.7}$$

где је $m$ параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{4.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

3. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$:

$$-\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P_g}{10} \tag{4.9}$$

4. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре $\vartheta_a$. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{4.10}$$

На основу израза (4.7), (4.9) и (4.10) може се написати:

$$-\lambda \cdot S \cdot (C_1 m - C_2 m) = \frac{P_g}{10} \tag{4.11}$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \tag{4.12}$$

Из једначине (4.12) добија се

$$C_2 = C_1 e^{2mL} \tag{4.13}$$

Заменом (4.13) у (4.11) добија се

$$-\lambda \cdot S \cdot m \cdot (C_1 - C_1 e^{2mL}) = \frac{P_g}{10} \tag{4.14}$$

$$C_1 = \frac{P_g}{10\lambda S m (e^{2mL} - 1)} \tag{4.15}$$

$$C_2 = \frac{P_g e^{2mL}}{10\lambda S m (e^{2mL} - 1)} \tag{4.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{P_g}{10\lambda S m (e^{2mL} - 1)} e^{mx} + \frac{P_g e^{2mL}}{10\lambda S m (e^{2mL} - 1)} e^{-mx} + \vartheta_a \tag{4.16}$$

Температура базиса ребра на координати $x = 0$ је због усвојене претпоставке са почетка задатка једнака температури основе хладњака:

$$\vartheta_o = \vartheta(x = 0) = \frac{P_g}{10\lambda S m (e^{2mL} - 1)} + \frac{P_g e^{2mL}}{10\lambda S m (e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a = \frac{P_g (e^{2mL} + 1)}{10\lambda S m (e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a \tag{4.17}$$

Температура на месту генерисања топлоте у полупроводничкој компоненти једнака је:

$$\vartheta_p = \vartheta_o + P_g R_{th,c} + P_g R_{th,pp} = \frac{P_g(e^{2mL}+1)}{10\lambda Sm(e^{2mL}-1)} + \vartheta_a + P_g(R_{th,pp} + R_{th,c}) \tag{4.18}$$

Из услова задатка да ова температура треба да буде мања од $\vartheta_{PP\ doz}$ = 150°C, долази се до неједнакости

$$\frac{P_g(e^{2mL}+1)}{10\lambda Sm(e^{2mL}-1)} + \vartheta_a + P_g(R_{th,pp} + R_{th,c}) \leq \vartheta_{PP\ doz} \tag{4.19}$$

а одатле

$$P_g \leq \frac{\left(\vartheta_{PP\ doz} - \vartheta_a - P_g(R_{th,pp} + R_{th,c})\right) 10\lambda Sm(e^{2mL}-1)}{e^{2mL}+1} = 76.4W \tag{4.19}$$

**<u>5. Задатак</u>**

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\cdot 95}{\pi}} = 10.998 \approx 11mm, \tag{5.1}$$

па је спољашњи пречник једножилног кабла:

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11 + 2 = 13mm \tag{5.2}$$

Вредност подужне топлотне отпорности, када постоји заштитна кошуљица, износи

$$R_l^T = R_{prov,PVC}^T + R_{prov,zk}^T + R_{prov,tlo}^T = \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2\pi\lambda_{zk}} ln\left(\frac{D_k}{D_s}\right) + \frac{\rho_z}{2\pi} ln\left(\frac{D_{ref}}{D_k}\right) = 1{,}2416\frac{Km}{W}, \tag{5.3}$$

а када заштитна кошуљица не постоји

$$R_l^T = R_{prov,PVC}^T + R_{prov,tlo}^T = \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{\rho_z}{2\pi} ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) = 1{,}8946\frac{Km}{W}. \tag{5.4}$$

Ова вредност је меродавна за одређивање максималне температуре изолације кабла (до проводника):

$$\vartheta_{iz\ max} = P_{\gamma\ l}\, R_l^T + \vartheta_z \tag{5.5}$$

Она у случају када постоји заштитна кошуљица износи $\vartheta_{iz\ max\ sa\ zk}$ = 57,25°C, а у случају када не постоји $\vartheta_{iz\ max\ bez\ zk}$ = 76,82°C.

Највиша температура земље, која је од значаја за њено исушивање, када постоји заштитна кошуљица, износи

$$\vartheta_{t\ m\ sa\ zk} = P_{\gamma\ l}\,\frac{\rho_z}{2\pi} ln\left(\frac{D_{ref}}{D_k}\right) + \vartheta_z = 39{,}21°\mathrm{C} \tag{5.6}$$

а када заштитна кошуљица не постоји

$$\vartheta_{t\ m\ bez\ zk} = P_{\gamma\ l}\,\frac{\rho_z}{2\pi} ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) + \vartheta_z = 71{,}84°\mathrm{C} \tag{5.7}$$

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

---

**Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута* 29. 4. 2022.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

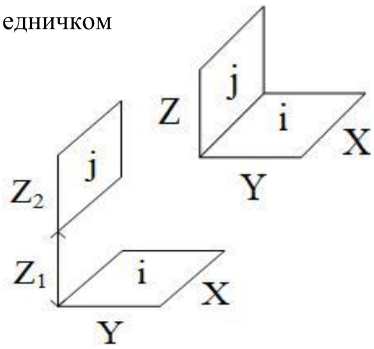
1. Раван хомоген зид сачињен од гвожђа дебљине $\delta_{Fe}$ = 8 mm загрева се услед генерисања топлоте по запремини снагом чија се запреминска густина мења на начин: $q_v = q_{v0} \cdot e^{-x/\delta}$ ($q_{v0}$ = 200·10$^3$ W/m$^3$, $\delta$ = 5 mm). Са унутрашње стране зида нанет је слој фарбе дебљине $\delta_{fu}$ = 0,1 mm, а са спољашње слој цинка дебљине $\delta_{Zn}$ = 0,08 mm и фарбе дебљине $\delta_{fs}$ = 0,15 mm. Специфична топлотна проводност фарбе износи $\lambda_f$ = 0,2 W/mK и много је мања од вредности за гвожђе и цинк. Одредити температуру површи унутрашње стране зида која је у додиру са уљем. Коефицијент преласка топлоте струјањем према уљу температуре $\vartheta_u$ =70°C износи $\alpha_u$ = 65 W/m$^2$K, а према амбијенталном ваздуху температуре $\vartheta_a$ =20°C износи $\alpha_a$ = 5 W/m$^2$K. (2п)

2. Вода у бојлеру запремине 80 литара са грејачем снаге 2 kW се загреје са 20°C на 75°C, после чега се грејач искључи и остаје трајно искључен. Колико дуго је могуће „пријатно туширање“, које настаје одмах по искључењу грејача, протоком воде 5 литра у минуту и температуре 40°C уколико је температура воде из водовода а) 15°C и б) 8°C? Снага преноса топлоте од воде ка амбијенту се током туширања може занемарити. Густина воде износи $\rho_v$ = 1000 kg/m$^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv}$ = 4200 J/(kgK), специфични топлотни капацитет металног казана $c_{pk}$ = 474 J/(kg K), а његова тежина $c_{pk}$ = 20 kg. Топлотни капацитет изолације се може занемарити. (2п)

3. Полазећи од израза за фактор виђења за геометрију два управна правоугаоника са заједничком ивицом (горња десна слика), где је $H = \frac{Z}{X}$, а $W = \frac{Y}{X}$:

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi W}\left(W\tan^{-1}\frac{1}{W} + H\tan^{-1}\frac{1}{H} - (H^2+W^2)^{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\frac{1}{(H^2+W^2)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}ln\left\{\frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2}\left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)}\right]^{W^2}\left[\frac{H^2(1+W^2+H^2)}{(1+H^2)(W^2+H^2)}\right]^{H^2}\right\}\right),$$

одредити фактор виђења за случај да управни правоугаоници немају заједничку ивицу, за геометрију приказану на слици доле лево – $X$ = 1 m, $Y$ = 1 m, $Z_1$= 1 m, $Z_2$ = 1 m. (2п)




4. За један хладњак су познати номинални подаци: проток воде $Q_{vn}$ = 4,167·10$^{-3}$ m$^3$/s, проток уља $Q_{un}$ = 22,2·10$^{-3}$ m$^3$/s, температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun}$ = 72°C и $\vartheta_{hun}$ = 64°C, температуре хладне и топле воде: $\vartheta_{hvn}$ = 25°C и $\vartheta_{tvn}$ = 42°C, расхладна снага хладњака $P_{hn}$ = 298 kW. Хладњак се може посматрати као елементарни облик хладњака кога сачињава $N_c$ = 109 хладњака елементарног облика цеви кроз које протиче вода унутар цеви кроз коју протиче уље. Проток кроз сваку од цеви је једнак укупном протоку воде (уља), подељеним са $N_c$. Смерови струјања уља и воде су супротни. Параметри воде и уља: $\rho_v$ = 1001 kg/m$^3$, $c_{pv}$ = 4209 = J/(kgK), $\rho_u$ = 830 kg/m$^3$, $c_{pu}$ = 2023 J/(kgK). Колика је вредност снаге која би се могла одвести преко хладњака у случају да се протоци не мењају, да температура $\vartheta_{tu}$ остане једнака 72°C, а температура хладне воде буде $\vartheta_{hv}$ = 15°C? (2п)

5. Једножилни кабл површине попречног пресека бакра $S_{Cu}$ = 95 mm$^2$ (специфична електрична проводност бакра на 20°C је $\sigma_{20\,Cu}$ =56·10$^6$ S/m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности бакра са температуром износи $\alpha_{Cu20}$ =4,29·10$^{-3}$°C$^{-1}$) са PVC изолацијом дебљине изолације $d_{iz}$ = 1 mm (топлотна специфична проводност $\lambda_{PVC}$ = 0,16 W/(m K)). Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл када се кабл налази у ваздуху (коефицијент преласка топлоте струјањем са површине кабла на ваздух је $\alpha$ = 7 W/(m$^2$K)), за два случаја: а) у току дана, када је температура амбијента $\vartheta_{a\,d}$=30°C, а кабл је на половини свог обим изложен зрачењу сунца површинске густине $q_s$ = 700 W/m$^2$, б) у току ноћи, када је температура амбијента $\vartheta_{a\,n}$=20°C? Дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{doz}$ = 70°C. Коефицијент сивоће кабла износи $\varepsilon$ = 0,8 (2п)

**1. Задатак**

Испит 25. 11. 2017., задатак 1.

**2. Задатак**

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C^T_{kazana} + C^T_{vode} = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 345{,}48\ \mathrm{kJ/K} \tag{2.1}$$

Топлотна енергија акумулирана у бојлеру и расположива за туширање, које се, по услову задатка, заврши кад температура не може да буде већа од 40°C, је

$$E_b = C^T(\vartheta_{poc} - \vartheta_{kr}) \tag{2.2}$$

где је $\vartheta_{poc}$ = 75°C и $\vartheta_{kr} = \vartheta_{potrš}$ = 40°C.

Енергија која се троши током туширања је

$$E_{tuš} = \int_{t=0}^{\mathrm{t}_{tuš}} \rho_v c_{pv} Q_v(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})\,dt = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) \int_{t=0}^{\mathrm{t}_{tuš}} dt = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})\mathrm{t}_{tuš} \tag{2.3}$$

Максимално је за туширање могуће искористити енергију одређену изразом (2.2), па важи

$$C^T(\vartheta_{poc} - \vartheta_{potrš}) = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})\mathrm{t}_{tuš} \tag{2.4}$$

Време „пријатног“ туширања једнако је

$$\mathrm{t}_{tuš} = \frac{C^T(\vartheta_{poc} - \vartheta_{potrš})}{\rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})} \tag{2.5}$$

Заменом бројних вредности добија се а) $t_{tuš}$ = 23 min и б) $t_{tuš}$ = 18 min.

**3. Задатак**

Испит 18. 12. 2018., задатак 4.

**4. Задатак**

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 189 до 198) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_p S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{4.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{hvn} = 39℃ \tag{4.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{tvn} = 30℃ \tag{4.3}$$

Заменом ових вредности у израз (4.1), уз $P_{hn}$ = 298 kW добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 8{,}687\,\frac{kW}{℃} \tag{4.4}$$

У новој радној тачки протоци уља и воде, као и температура топлог уља једнаки су номиналним вредностима, док је температура хладне воде опала на $\vartheta_{hv}$ = 15°C. За ову радну тачку могуће је написати следећи систем једначина:

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv}(\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \tag{4.5}$$

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu}(\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \tag{4.6}$$

$$P_h = \frac{K_p S(\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{tv})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}}\right)} \tag{4.7}$$

Из једначина (4.5) и (4.6) добија се

$$\vartheta_{tv} = \vartheta_{hv} + \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} \tag{4.8}$$

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} \tag{4.9}$$

Заменом (4.8) и (4.9) у (4.7) добија се једначина чијим се решавањем добија тражена расхладна снага:

$$P_h = \frac{K_p S\left(\vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - \vartheta_{hv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv} + \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}}\right)}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}}}\right)} \tag{4.10}$$

$$P_h = \frac{K_p S\left(-\frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} + \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}}\right)}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}}}\right)} \tag{4.11}$$

Тражена расхладна снага је $P_h$ = 495 kW

## <u>5. Задатак</u>

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10.998 \approx 11mm, \tag{5.1}$$

па је спољашњи пречник једножилног кабла:

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11 + 2 = 13mm \tag{5.2}$$

У граничном случају, при дозвољеној једносмерној струји, температура бакарног проводника једнака је 70°C, па вредност подужне електричне отпорности бакра износи:

$$R_{Cu}^{70°C} = \frac{1}{\sigma \cdot S}\left(1 + \alpha(70°C - 20°C)\right) = \frac{1}{56 \cdot 95}(1 + 4{,}29 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 2{,}28 \cdot 10^{-4} \Omega m \tag{5.3}$$

У стационарном топлотном стању сва топлота која настаје као последица Џулових губитака у бакарном проводнику одводи се у околину, преко PVC изолације, струјањем ка околном ваздуху и зрачењем. Кабл се у току дана додатно загрева услед сунчевог зрачења, док током ноћи та компонента не постоји.

Џулови губици једнаки су:

$$P_\gamma = R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 \tag{5.4}$$

Температуру површине изолације кабла могуће је одредити из једначине

$$P_\gamma = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_p}{R_{iz}^T} \tag{5.5}$$

где је

$$R_{iz}^T = \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) \tag{5.6}$$

Из једначина (5.4) и (5.5) добија се

$$\vartheta_p = \vartheta_{doz} - R_{Cu}^{70°C} \cdot R_{iz}^T \cdot I^2 \tag{5.7}$$

Једначина биланса снага за кабл гласи:

$$P_\gamma + P_{sol} = P_{zr} + P_{str} \tag{5.8}$$

где је током дана $P_{sol} = \varepsilon q_s D_s \pi/2$, а током ноћи $P_{sol} = 0$. Снага која се одводи зрачењем једнака је

$$P_{zr} = \varepsilon\sigma_c D_s \pi\left(\left(\vartheta_p + 273.15\right)^4 - (\vartheta_a + 273.15)^4\right) \tag{5.9}$$

док је снага која се одводи струјањем

$$P_{str} = \alpha D_s \pi\left(\vartheta_p - \vartheta_a\right) \tag{5.10}$$

Заменом (5.7), (5.9) и (5.10) у (5.8) добија се једначина чијим се решавањем долази до тражене струје

$$\begin{aligned} R_{Cu}^{70°C} \cdot I^2 + P_{sol} = \varepsilon\sigma_c D_s \pi\left(\left(\vartheta_{doz} - R_{Cu}^{70°C} \cdot R_{iz}^T \cdot I^2 + 273.15\right)^4 - (\vartheta_a + 273.15)^4\right) \\ + \alpha D_s \pi\left(\vartheta_{doz} - R_{Cu}^{70°C} \cdot R_{iz}^T \cdot I^2 - \vartheta_a\right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Тражена струја током дана једнака је $I_{doz,d}$ = 200,24 A, а током ноћи $I_{doz,n}$ = 324,29 A.

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута* 4. 7. 2022.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

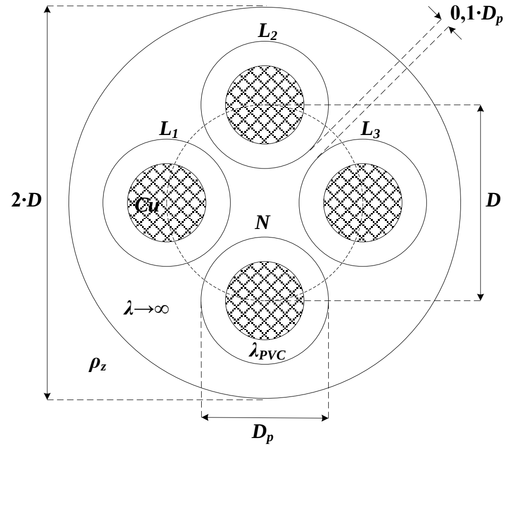
1. Једна квадратна површ (1) странице $a = 5$ cm налази се на растојању $L$ од правоугаоне површи (2) димензија $b$ x $c$ = 8 cm x 3 cm. Написати изразе из којих се могу одредити вредности фактора виђења $F_{12}$ и $F_{21}$. Колико износи минимално растојање $L$ при коме би се фактор виђења квадрата са правоугаоника ($F_{21}$) могао одредити на једноставан начин, без потребе да се решава интеграл. Критеријуми за константност величина испод интеграла су следећи: да се углови у односу на нормалу не мењају за више од 1°, а растојања у односу на $L$ за више од 1%. Површи су међусобно паралелне и центри им се поклапају. (2п)

2. Термоакумулациона (ТА) пећ, инсталиране снаге $P_n = 5$ kW, користи се за загревање једне просторије. Пећ ради у циклусима од 24 часа. Грејач се укључује на почетку циклуса (0:00h), а искључује се након што пораст температуре изотермичког језгра пећи (шамотно језгро и грејач) достигне $\theta_{max} = 700$ K и остаје искључен до поноћи (24:00h). Снага којом се енергија троши, издувавањем ваздуха из пећи, је константна током целог циклуса и износи $P_z = 1{,}2$ kW. Колико времена ће грејач бити укључен током једног дана? Познате су вредности топлотног капацитета изотермичког језгра пећи $C^T = 1{,}6\cdot10^5$ J/K и топлотног отпора преносу топлоте од изотермичког језгра до амбијента $R^T = 3{,}5$ K/W. Сматрати да пећ ради у квазистационарном режиму, тако да је температура изотермичког језгра на почетку и на крају циклуса (у поноћ претходног и текућег дана) једнака. (2п)

3. Написати диференцијалну једначину и граничне услове који описују промену температуре дуж ребра за хлађење. Претпостављајући да је ова једначина решена, односно да је добијен израз за промену температуре дуж ребра ($\vartheta(x)$), написати израз за снагу која се са ребра преноси ка амбијенту температуре $\vartheta_a$. Коефицијент преласка топлоте са ребра на ваздух зависи од разлике температура ребра и амбијента као $\alpha(\theta) = \alpha_0\cdot(\theta / 20)^{0,25}$, где је $\alpha_0$ позната константа. Ребро је кружног попречног пресека пречника $D$ и дужине $L$. Топлотна проводности материјала од кога је сачињено ребро износи $\lambda$. Сваки од два базиса ребра је ослоњен на тело температуре $\vartheta_b$. (2п)

4. За један трансформатор са ODWF хлађењем одабран је компактан хладњак чија је номинална снага 20% већа од номиналне снаге укупних губитака у трансформатору. Сматра се да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun} = 60$°C и $\vartheta_{hun} = 55$°C, температуре хладне и топле воде: $\vartheta_{hvn} = 25$°C и $\vartheta_{tvn} = 38$°C, номинална снага $P_{hn} = 530$ kW, проток уља $Q_{un} = 0{,}062$ m$^3$/s и проток воде $Q_{vn} = 36$ m$^3$/s. Током експлоатације, доминантно услед таложења материја на површ хладњака која је у додиру са водом, долази до смањења коефицијента преноса топлоте услед запрљања хладњака од 30% и смањења протока воде од 20%. Колико износи температура уља на уласку у хладњак у устаљеном стационарном стању при температури расхладне воде $\vartheta_{hv} = 20$°C и оптерећењу трансформатора 0.8 p.j. Однос номиналних губитака услед опетерећења и у магнетном колу износи 5. Сматрати да су губици у магнетном колу, у посматраној радној тачки, једнаки номиналним. Параметри уља и воде су исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у супротном смеру. (2п)

5. Један трофазни четворожилни кабл пресека бакра (специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\,Cu} = 56\cdot10^6$ S/m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{Cu20} = 4{,}29\cdot10^{-3}$°C$^{-1}$) $S_{Cu} = 95$ mm$^2$, са PVC изолацијом дебљине изолације $\delta_{iz} = 1$ mm (топлотне специфичне проводности $\lambda_{PVC} = 0{,}16$ W/(mK)) положен је у тло специфичне топлотне отпорности $\rho_z$=2,5 (mK)/W. Проводници су заливени материјалом добре топлотне проводности тако да је спољашњи пречник кабла једнак $2D = 20{,}22$ mm (слика). Максимална дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{doz} = 70$°C, а температура земље удаљене од кабла $\vartheta_z = 20$°C. Одредити максимално дозвољену вредност струје која протиче кроз проводнике кабла који напаја симетрично трофазно оптерећење. При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтну тло", на коме је температура једнака $\vartheta_z = 20$°C, може узети цилиндар пречника $D_{ref} = 1000$ mm. Занемарити скин ефекат и ефекат близине. Колико износи дозвољена струја у случају једножилног кабла истог пресека, дебљине изолације $\delta_{iz}$, преко кога је нанет материјал добре топлотне проводности чија је дебљина толика да спољашњи пречник кабла износи $2D = 20{,}22$ mm. (2п)

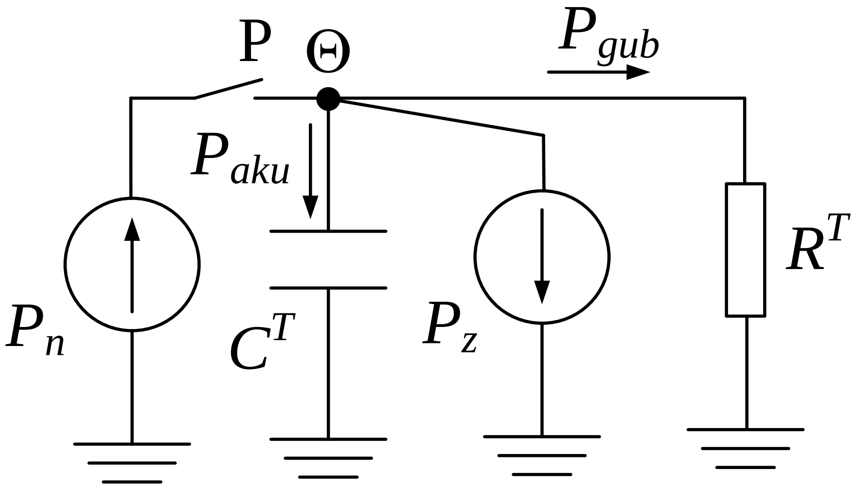


**1. Задатак**

Колоквијум 28. 11. 2020., задатак 3.

**2. Задатак**

Топлотна шема која описује процес загревања пећи приказана је на слици 2.1.




Слика 2.1.

Прекидач P је затворен током периода загревања пећи, док је у остатку циклуса отворен.
На почетку циклуса (0:00h) пораст температуре изотермичког језгра је $\theta_x$, у том тренутку грејач се укључује и остаје укључен $x$ сати. У тренутку искључења грејача пораст температуре изотермичког језгра је $\theta_{max}$ = 700 K. Након тог тренутка, до краја посматраног циклуса (24 – $x$ сати), температура језгра опада тако да је на крају циклуса (24:00 h) пораст температуре поново једнак $\theta_x$.
Једначина биланса снага за топлотну шему на слици 2.1. гласи:

$$P_n = P_{akum} + P_z + P_{gub} \tag{2.1}$$

где је

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{2.2}$$

$$P_{gub} = \frac{\theta}{R^T} \tag{2.3}$$

Заменом (2.2) и (2.3) у (2.1) и једноставним трансформисањем добијеног израза добија се диференцијална једначина која описује промену температуре изотермичког језгра:

$$P_n - P_z = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \tag{2.4}$$

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \tag{2.5}$$

$$P_g R^T = R^T C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \tag{2.6}$$

где је $P_g$ = 5000 – 1200 = 3800 W када је прекидач P затворен, а $P_g$ = – 1200 W када је отворен. Решење диференцијалне једначине (2.6) има облик

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{2.7}$$

где је $\tau = R^T C^T$ = 156,56h, а $\theta_\infty = P_g R^T$ тј. у случају када је прекидач P затворен $\theta_\infty^1$ = 13300 K, а у случају када је отворен $\theta_\infty^2$ = -4200 K (НАПОМЕНА: ове вредности имају чисто математички карактер и нису физички утемељене).
Температура на крају првог периода дана, када је грејач укључен тј. прекидач P на слици 2.1 затворен, одређује се из следећег израза:

$$\theta_{max} = \theta_x \cdot e^{-\frac{x}{\tau}} + \theta_\infty^1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{x}{\tau}}\right) \tag{2.8}$$

а на крају другог периода тј. на крају дана

$$\theta_x = \theta_{max} \cdot e^{-\frac{(24-x)}{\tau}} + \theta_\infty^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{(24-x)}{\tau}}\right) \tag{2.9}$$

Заменом израза (2.9) у (2.8) добија се

$$\theta_{max} = \left(\theta_{max} \cdot e^{-\frac{(24-x)}{\tau}} + \theta_\infty^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{(24-x)}{\tau}}\right)\right) \cdot e^{-\frac{x}{\tau}} + \theta_\infty^1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{x}{\tau}}\right) \tag{2.10}$$

$$\theta_{max} = \theta_{max} \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} + \theta_\infty^2 \cdot e^{-\frac{x}{\tau}} - \theta_\infty^2 \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} + \theta_\infty^1 - \theta_\infty^1 \cdot e^{-\frac{x}{\tau}} \tag{2.11}$$

$$\theta_{max} - \theta_{max} \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} + \theta_\infty^2 \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} - \theta_\infty^1 = (\theta_\infty^2 - \theta_\infty^1) \cdot e^{-\frac{x}{\tau}} \tag{2.12}$$

$$e^{-\frac{x}{\tau}} = \frac{\theta_{max} - \theta_{max} \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} + \theta_\infty^2 \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} - \theta_\infty^1}{\theta_\infty^2 - \theta_\infty^1} \tag{2.13}$$

$$x = -\tau \cdot \ln \frac{\theta_{max} - \theta_{max} \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} + \theta_\infty^2 \cdot e^{-\frac{24}{\tau}} - \theta_\infty^1}{\theta_\infty^2 - \theta_\infty^1} \tag{2.14}$$

Из израза (2.14) добија се тражено време рада грејача које износи 6,36h.

**<u>3. Задатак</u>**

Због симетрије, могуће је посматрати само једну половину ребра, односно прорачун се своди на „стандардни" случај ребра које је само једним базисом ослоњено на тело, док је површ другог базиса адијабатса. Укупна снага која се преко ребра одводи ка амбијенту једнака је двострукој вредности снаге која се одводи са ребра дужине једнаке половини стварне дужине ребра, познате температуре једног базиса и адијабадског другог базиса. Диференцијална једначина која описује промену температуре дуж ребра у устаљеном добија се на следећи начин:

$$q_s = -\lambda\, grad\, \vartheta \tag{3.1}$$

$$q_{sx} = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.2}$$

$$q(x) = -\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.3}$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \tag{3.4}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha(\vartheta(x)) \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) D\pi dx \tag{3.5}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha_0 \frac{(\vartheta(x) - \vartheta_a)^{0,25}}{20^{0,25}} (\vartheta(x) - \vartheta_a) D\pi dx = \alpha_0 \frac{(\vartheta(x) - \vartheta_a)^{1,25}}{20^{0,25}} D\pi dx \tag{3.6}$$

$$dq_\alpha(x) = -dq(x) \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{4\alpha_0}{20^{0,25}\lambda D} (\vartheta(x) - \vartheta_a)^{1,25} \tag{3.8}$$

Гранични услови за базисе ребра:

1. За базис ослоњен на тело температуре $\vartheta_b$:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_b \tag{3.9}$$

2. За базис који се налази на равни симетрије:

$$\frac{d\vartheta}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 \tag{3.10}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$q_{uk} = 2q(x = 0) = -2\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d\vartheta}{dx}(x = 0) \tag{3.11}$$

**<u>4. Задатак</u>**

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 189 до 198) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_p S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{4.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{hvn} = 30°\mathrm{C} \tag{4.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{tvn} = 22°\mathrm{C} \tag{4.3}$$

Заменом ових вредности у израз (4.1), уз $P_{hn}$ = 530 kW добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 20{,}5478 \frac{kW}{°\mathrm{C}} \tag{4.4}$$

За воду и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \tag{4.5}$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \tag{4.6}$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{(\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) Q_{vn}} = 1{,}1325 \frac{kW}{K} \tag{4.7}$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) Q_{un}} = 1709{,}6774 \frac{kW}{K} \tag{4.8}$$

Укупни номинални губици у трансформатору једнаки су $P_{gn} = P_{hn}/1{,}2 = 441{,}67$ kW. На основу ове вредности и познатог односа номиналних губитака услед опетерећења и у магнетном колу могуће је одредити њихове вредности:

$$P_{gn} = P_{Cu,n} + P_{Fe,n} = 5 \cdot P_{Fe,n} + P_{Fe,n} \tag{4.9}$$

$$P_{Fe,n} = \frac{P_{gn}}{6} = 73{,}61\ kW \tag{4.10}$$

$$P_{Cu,n} = 5 \cdot P_{Fe,n} = 368{,}06\ kW \tag{4.11}$$

У посматраној радној тачки оптерећење трансформатора је $\beta = 0{,}8$ p.j., па су укупни губици једнаки

$$P_g = P_{Cu} + P_{Fe} = P_{Cu,n} \cdot \beta^2 + P_{Fe,n} = 309{,}17\ kW \tag{4.12}$$

Расхладна снага хладњака једнака је укупним губицима $P_h = P_g$. Коефицијент преноса топлоте опао је за 30% $K_pS = 0{,}7K_{pn}S = 14{,}3834$ kW/°C. Температура хладне воде је $\vartheta_{hv} = 20$°C. Проток уља једнак је номиналним $Q_u = Q_{un}$, а проток воде опао је за 20% $Q_v = 0{,}8Q_{vn} = 28{,}8$ m$^3$/s. За воду се сада може написати израз аналоган изразу (4.5) из којег је могуће одрети температуру воде на изласку из хладњака:

$$\vartheta_{tv} = \vartheta_{hv} + \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} = 29{,}48\text{°C} \tag{4.13}$$

За уље се, такође, може написати израз аналоган изразу (4.6) из којег је могуће изразити температуру уља на изласку из хладњака:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} \tag{4.14}$$

За снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (4.1):

$$P_h = \frac{K_p S (\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{tv})}{\ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}}\right)} \tag{4.15}$$

Заменом израза (4.14) у (4.15) добија се једначина, чијим се решавањем може одредити температура уља на уласку у хладњак:

$$P_h = \frac{K_p S \left(\vartheta_{tu} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - \vartheta_{hv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{tv}\right)}{\ln\left(\dfrac{\vartheta_{tu} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}}\right)} \tag{4.16}$$

$$P_h = \frac{K_p S \left(\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}}\right)}{\ln\left(\dfrac{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}}\right)} \tag{4.17}$$

$$P_h = \frac{\mathrm{A}}{\ln\left(\dfrac{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}}\right)} \tag{4.18}$$

$$\frac{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \dfrac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{P_h}} \tag{4.19}$$

$$\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} = \vartheta_{tu} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{P_h}} - \vartheta_{tv} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{P_h}} \tag{4.20}$$

$$\vartheta_{tu} = \frac{\vartheta_{hv} + \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - \vartheta_{tv} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{P_h}}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{A}}{P_h}}} = 47{,}86℃ \tag{4.21}$$

**<u>5. Задатак</u>**

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10{,}998 \approx 11\ mm, \tag{5.1}$$

па је спољашњи пречник једне жиле кабла:

$$D_p = D_u + 2\delta_{iz} = 11 + 2 = 13\ mm \tag{5.2}$$

У граничном случају, при дозвољеној струји, температура бакарног проводника једнака је 70℃, па вредност подужне електричне отпорности бакра износи:

$$R_{Cu}^{70℃} = \frac{1}{\sigma \cdot S}\big(1 + \alpha(70℃ - 20℃)\big) = \frac{1}{56 \cdot 95}(1 + 4{,}29 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 2{,}28 \cdot 10^{-4} \Omega m \tag{5.5}$$

У стационарном топлотном стању сва топлота која настаје као последица Џулових губитака у бакарном проводнику одводи се, преко PVC изолације, ка околном материјалу добре топлотне проводности (температуре $\vartheta$). Ово стање описује се следећом једначином:

$$R_{Cu}^{70℃} \cdot I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{PVC}^T} \tag{5.6}$$

Одакле се долази до:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{Cu}^{70℃} \cdot R_{PVC}^T}} \tag{5.7}$$

Вредност подужне топлотне отпорности изолације проводника износи:

$$R_{PVC}^T = \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} ln\left(\frac{D_p}{D_u}\right) = 0{,}166\ Km/W \tag{5.8}$$

Топлота генерисана Џуловим губицима у три оптерећена проводника ($3 \cdot R_{Cu}^{70℃} \cdot I^2$) одводи се са површине материјала добре топлотне проводности (цилиндар пречника $D$) провођењем у околно тло:

$$3 \cdot R_{Cu}^{70℃} \cdot I^2 = \frac{\vartheta - \vartheta_z}{R_z^T} \tag{5.9}$$

где је:

$$R_z^T = \frac{\rho_z}{2\pi} ln\left(\frac{D_{ref}}{2D}\right) = 1{,}276\ Km/W \tag{5.10}$$

Комбиновањем израза (5.6) и (5.9) добија се:

$$3 \cdot \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{PVC}^T} = \frac{\vartheta - \vartheta_z}{R_z^T} \tag{5.11}$$

Решавањем једначине (5.11) добија се температура $\vartheta$:

$$\vartheta = \frac{3\vartheta_{doz} + \vartheta_z \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}}{3 + \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}} = 67{,}92℃ \tag{5.12}$$

Сада се из израза (5.7) добија тражена вредност струје:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 67{,}92}{2{,}28 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}166}} = 234{,}29\ A \tag{5.13}$$

У случају када постоји само један једножилни проводник, користећи исти поступак као у случају три проводника, могуће је написати израз аналоган изразу (5.11)

$$\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{PVC}^T} = \frac{\vartheta - \vartheta_z}{R_z^T} \tag{5.14}$$

Решавањем једначине (5.14) добија се температура $\vartheta$, а након тога коришћењем израза (5.7) и тражена струја:

$$\vartheta = \frac{\vartheta_{doz} + \vartheta_z \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}}{1 + \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}} = 64{,}24°\mathrm{C} \tag{5.15}$$

$$I = \sqrt{\frac{70 - 64{,}24}{2{,}28 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}166}} = 389{,}97\ A \tag{5.16}$$

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

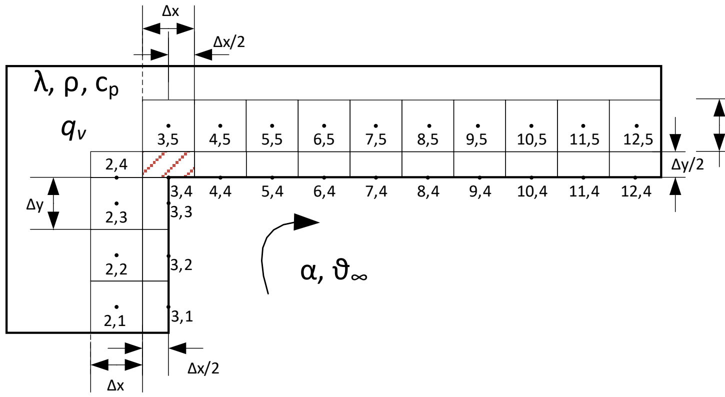
**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута* 29. 8. 2022.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

1. Сфера пречника $D_u$ = 5 cm, емисивности $\varepsilon_u$ = 0,8 и температуре $\vartheta_u$ = 800°C се налази унутар спољне сфере унутрашњег пречника $D_s$ = 8 cm емисивности $\varepsilon_s$ = 0,7. По запремини унутрашње сфере се генерише топлота запреминске густине снаге $q_v = 10^6$ W/m$^3$. Колико износи температура унутрашње површ спољашње сфере у наведеним случају и у случају да се између две сфере стави трећа, унутрашњег пречника $D_{eu}$ = 7 cm, спољашњег пречника $D_{es}$ = 7,1 cm и емисивности обе стране $\varepsilon_e$ = 0,2? Специфична топлотна проводност материјала од кога је сачињена ова сфера износи $\lambda$=0,1 (W/(m·K)). Израз за градијент температуре у сферном координатном систему ($\varphi$ –азимутни угао, $\theta$ – зенитни угао) гласи:

$$grad\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{\imath}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\vec{\imath}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{\imath}_\varphi.$$ (2п)




2. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (3,4). При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити имплицитну методу. По запремини постоји генерисања топлоте. Запреминском густином $q_v$. Топлотна проводност материјала је $\lambda$, специфични топлотни капацитет је $c_p$, густина $\rho$ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре $\vartheta_\infty$ је $\alpha$. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (2п)

3. Написати диференцијалну једначину и граничне услове који описују промену температуре дуж ребра за хлађење. Претпостављајући да је ова једначина решена, односно да је добијен израз за промену температуре дуж ребра ($\vartheta(x)$), написати израз за снагу која се са ребра преноси ка амбијенту температуре $\vartheta_a$. Коефицијент преласка топлоте са ребра на ваздух зависи од разлике температура ребра и амбијента као $\alpha(\theta) = \alpha_0 \cdot (\theta / 20)^{0,25}$, где је $\alpha_0$ позната константа. Ребро је кружног попречног пресека пречника $D$ и дужине $L$. Топлотна проводности материјала од кога је сачињено ребро износи $\lambda$. Ребро служи за хлађење полупроводничких компоненти, при чему је свака од две компоненте ослоњена на базис ребра. Позната је вредност топлотног отпора $R_{pp}$ између базиса ребра и места генерисања топлоте које се налази на температури $\vartheta_b$. (2п)

4. Одредити термосифонске силе, које изазивају струјање уља код трансформатора са ON хлађењем након успостављања стационарног стања. Позната је висина хладњака ($H_h$), висина намотаја ($H_n$) и то да се дно хладњака налази на растојању $h_{hn}$ изнад дна намотаја. Познате су температуре горњег и доњег уља у стационарном стању ($\vartheta_{gun,stac}$ и $\vartheta_{dun,stac}$) – тада је температура уља на изласку из намотаја једнака температури уља на уласку у хладњак. Позната је промена густине уља са температуром: $\rho = \rho_0 - \beta \cdot \vartheta$ (где је $\rho_0$ густина уља на 0°C, а $\vartheta$ температура уља). Термосифонска сила се може одредити као површина затворене контуре промене густине уља. Посматрати само једну контуру уља (један намотај и један хладњак). (2п)

5. Посматрајмо просторију димензија $a$ x $b$ = 5 m x 4 m, висине $h$ = 2,5 m. Температуру просторије је потребно загревањем одржавати на $\vartheta_p$ = 20°C. Изнад и испод просторије, као и поред једног од два дужа зида се налазе загревани простори чија је температура 20°C. У случају када је температура амбијента $\vartheta_{ap}$ = 5°C и када нема ветра потребна снага загревања износи $P_p$ = 235 W. Колико из носи потребна снага загревања $P_v$ у случају када је температура амбијента $\vartheta_{av}$ = -10°C и када су један дужи зид и један краћи зид изложени ветру, док је један краћи зид у заветрини. Коефицијент преласка струјањем на унутрашњој страни и на спољашњој страни када нема ветра износи $\alpha_p$ = 5 (W/(m$^2$·K)), а на спољашњој страни када је она изложена ветру $\alpha_v$ = 20 (W/(m$^2$·K)). (2п)

## 1. Задатак

Вектор површинске густине снаге провођења у сферном координатном систему одређује се као

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot grad\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{\imath}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\vec{\imath}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{\imath}_\varphi\right) \tag{1.1}$$

Због симетрије, температура је константна на свакој од угаоних координата:

$$\vartheta = \vartheta(r) = const(\theta,\varphi), \tag{1.2}$$

одакле се добија

$$\vec{q}_s = q_S(r)\cdot\vec{\imath}_r = -\lambda\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{\imath}_r \tag{1.3}$$

У стационарном стању флукс вектора површинске густине снаге кроз сферну површ пречника $r$ је константан (у љусци не генерише и не акумулише топлота), одакле се долази до

$$q_S = \frac{q}{4\cdot\pi\cdot r^2} \tag{1.4}$$

а према (1.3) и (1.4)

$$\partial\vartheta = -\frac{q}{\lambda\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2}\,\partial r \tag{1.5}$$

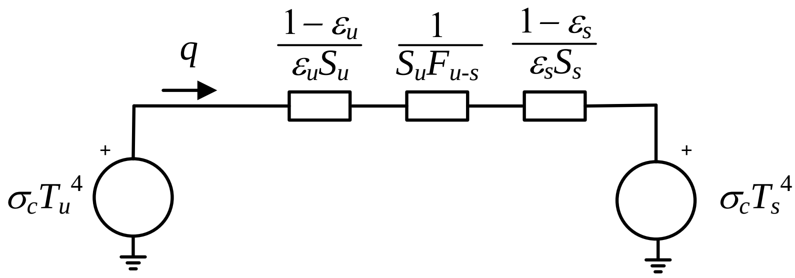
Интеграцијом у границама $r \in [r_u, r_s]$ долази се до

$$\vartheta_s - \vartheta_u = \frac{q}{\lambda\cdot 4\cdot\pi}\left(\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_s}\right) \tag{1.6}$$

Из претходног израза се може одредити вредност топлотног провођењу топлоте од унутрашње до спољашње површи љуске:

$$R^T_{ljuske} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{q} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{1}{r_u} - \frac{1}{r_s}\right) \tag{1.7}$$

У случају да екран није постављен, размена енергије зрачењем између површи унутрашње и спољашње сфере може се анализирати на основу следеће радијационе шеме (слика 1.1):




Слика 1.1

Пошто целокупна енергија емитована са површи унутрашње сфере доспева на површ спољашње, на основу дефиниције фактора виђења закључује се да је $F_{u\text{-}s} = 1$.

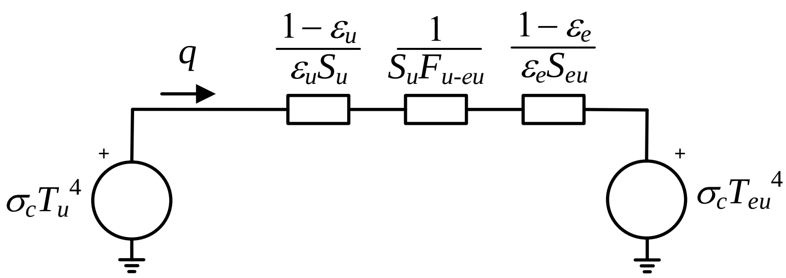
На основу радијационе шеме (слика 1.1) може се израчунати укупна подужна енергија која се размењује између унутрашње и спољашње сфере:

$$q = \frac{\sigma_c(T_u^4 - T_s^4)}{\frac{1-\varepsilon_u}{S_u\varepsilon_u} + \frac{1}{S_u F_{u-s}} + \frac{1-\varepsilon_s}{S_s\varepsilon_s}} \tag{1.8}$$

где је $S_u = D_u^2\pi$ и $S_s = D_S^2\pi$, а $q = q_v\cdot D^3\pi / 6$. Решавањем једначине (1.12) добија се тражена температура унутрашње површи спољашње сфере $\vartheta_s = 755{,}12$°C.

Након постављања екрана, енергија се зрачењем преноси између спољашње површи унутрашње сфере и унутрашње површи екрана, затим провођењем кроз екран и, на крају, зрачењем између спољашње површи екрана и унутрашње површи спољашње сфере.

Радијациона шема за пренос топлоте са унутрашње сфере на екран приказана је на слици 1.2. Пошто сва енергија емитована са спољашње површи унутрашње сфере доспева на унутрашњу површ екрана, закључује се да је $F_{u\text{-}eu} = 1$.




Слике 1.2.

На основу радијационе шеме (слика 1.2) може се израчунати укупна енергија која се размењује између унутрашње сфере и унутрашње површи екрана:

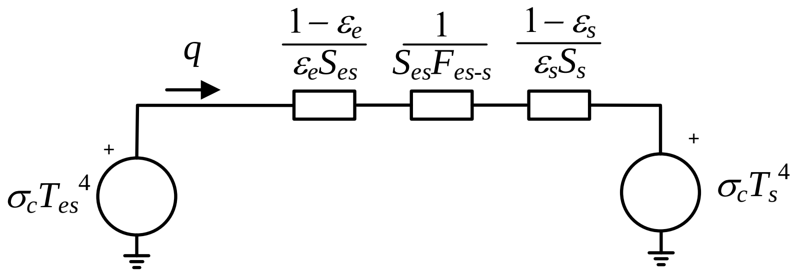
$$q = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_{eu}^4)}{\frac{1-\varepsilon_u}{\varepsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u-eu}} + \frac{1-\varepsilon_e}{\varepsilon_e S_{eu}}} \tag{1.9}$$

где је $S_{eu} = D_{eu}^2\pi$. Решавањем једначине (1.9) добија се тражена температура унутрашње површи екрана $\vartheta_{eu}$ = 684,95°C. Снага ($q$) која стигне до унутрашње површи екрана провођењем се преноси до његове спољашње површи. Пад температуре између унутрашње и спољашње површи екран одређује се из једначине

$$q = \frac{\vartheta_{eu} - \vartheta_{es}}{R^T} = \frac{\vartheta_{eu} - \vartheta_{es}}{\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{1}{D_{eu}} - \frac{1}{D_{es}}\right)} \tag{1.10}$$

$$\vartheta_{es} = \vartheta_{eu} - \frac{q}{2\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{1}{D_{eu}} - \frac{1}{D_{es}}\right) = 663{,}99℃ \tag{1.11}$$

Радијациона шема за пренос топлоте са спољашње површи екрана на унутрашњу површ спољашње сфере приказана је на слици 1.3. Целокупна енергија емитована са спољашње површи екрана доспева до унутрашње површи спољашње сфере, па важи $F_{es\text{-}s}$ = 1.




Слика 1.3.

На основу радијационе шеме (слика 1.3) може се израчунати укупна енергија која се размењује између спољашње површи екрана и унутрашње површи спољашње сфере:

$$q = \frac{\sigma_c (T_{es}^4 - T_s^4)}{\frac{1-\varepsilon_e}{\varepsilon_e S} + \frac{1}{S_{es} F_{u-es}} + \frac{1-\varepsilon_s}{S_s \varepsilon_s}} \tag{1.12}$$

где је $S_{es} = D_{es}^2\pi$. Решавањем једначине (1.16) добија се тражена температура унутрашње површи спољашње сфере $\vartheta_s$ = 513,14°C.

## <u>2. Задатак</u>

Биланс снаге за посматрани елемент (3,4) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{2.1}$$

где су:

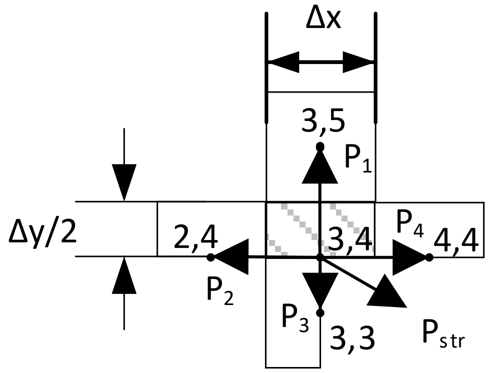
- $P_{gen}$ - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{akum}$ - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Снага којом се топлота генерише у елементу је

$$P_{gen} = q_v \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \tag{2.2}$$

По имплицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у тренутном ($p$) тренутку у односу на претходни тренутак ($p$ – 1):

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{3,4}}{dt} = \rho\, c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,4}^{p-1}}{\Delta t} \tag{2.3}$$




Слика 2.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{2.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од четири члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 5), (2, 4), (3,3) и (4, 4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{4} P_k \tag{2.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,5}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{L\Delta x}} \tag{2.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{2,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{2,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{2.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y/2}{L\Delta x/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda L}\frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{2.7}$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{4,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{4,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{2.8}$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{L\Delta x/2}} = \frac{1}{2}\alpha L\Delta x\left(\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{\infty}^p\right) \tag{2.9}$$

**3. Задатак**

Због симетрије, могуће је посматрати само једну половину ребра, односно прорачун се своди на „стандардни“ случај ребра које је само једним базисом ослоњено на тело, док је површ другог базиса адијабатска. Укупна снага ($q_{uk}$) која се преко ребра одводи ка амбијенту једнака је двострукој вредности снаге која се одводи са ребра дужине једнаке половини стварне дужине ребра, познате температуре једног базиса и адијабадског другог базиса. Диференцијална једначина која описује промену температуре дуж ребра у устаљеном добија се на следећи начин:

$$q_s = -\lambda\, grad\, \vartheta \tag{3.1}$$

$$q_{sx} = -\lambda\, \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.2}$$

$$q(x) = -\lambda \frac{D^2\pi}{4}\, \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3.3}$$

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\lambda \frac{D^2\pi}{4}\, \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \tag{3.4}$$

$$dq_{\alpha}(x) = \alpha(\vartheta(x)) \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a)D\pi dx \tag{3.5}$$

$$dq_\alpha(x) = \alpha_0 \frac{(\vartheta(x) - \vartheta_a)^{0,25}}{20^{0,25}} (\vartheta(x) - \vartheta_a) D\pi dx = \alpha_0 \frac{(\vartheta(x) - \vartheta_a)^{1,25}}{20^{0,25}} D\pi dx \tag{3.6}$$

$$dq_\alpha(x) = -dq(x) \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{4\alpha_0}{20^{0,25}\lambda D} (\vartheta(x) - \vartheta_a)^{1,25} \tag{3.8}$$

Гранични услови за базисе ребра:

3. Између базиса ребра и полупроводничке компоненте постоји контактна топлотна отпорност тј. постоји пад температуре од $\vartheta_b$ до базиса ребра:

$$\frac{\vartheta_b - \vartheta(x = 0)}{R_{pp}} = \frac{q_{uk}}{2} \tag{3.9}$$

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_b - R_{pp} \frac{q_{uk}}{2} \tag{3.10}$$

4. За базис који се налази на равни симетрије:

$$\frac{d\vartheta}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 \tag{3.11}$$

Укупна снага која се преноси преко ребра износи:

$$q_{uk} = 2q(x = 0) = -2\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d\vartheta}{dx}(x = 0) \tag{3.12}$$

**<u>4. Задатак</u>**

Испит / Колоквијум 25. 1. 2020, други део задатка 3.

**<u>5. Задатак</u>**

Снага загревања просторије једнака је снази која се, кроз три зида (два краћа и један дужи), одводи ка амбијенту:

$$P = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T} \tag{5.1}$$

где је топлотни отпор $R^T$ једнак:

$$R^T = \left(\frac{1}{R_{k1}^T} + \frac{1}{R_{k2}^T} + \frac{1}{R_d^T}\right)^{-1} \tag{5.2}$$

Топлотне отпорности зидова из (1.2) одређују се као

$$R_d^T = \frac{1}{\alpha_{un} S_d} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_d} + \frac{1}{\alpha_{sp,d} S_d} \tag{5.3}$$

$$R_{k1}^T = \frac{1}{\alpha_{un} S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_{sp,k1} S_k} \tag{5.4}$$

$$R_{k2}^T = \frac{1}{\alpha_{un} S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_{sp,k2} S_k} \tag{5.5}$$

У случају када нема ветра важи $\alpha_{un} = \alpha_{sp,d} = \alpha_{sp,k1} = \alpha_{sp,k2} = \alpha_p$:

$$R_d^T = \frac{2}{\alpha_p S_d} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_d} \tag{5.6}$$

$$R_{k1}^T = \frac{2}{\alpha_p S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} = R_k^T \tag{5.7}$$

$$R_{k2}^T = \frac{2}{\alpha_p S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} = R_k^T \tag{5.8}$$

$$R^T = \frac{R_d^T R_k^T}{2R_d^T + R_k^T} \tag{5.9}$$

На основу познате снаге загревања и (5.1) добија се

$$R^T = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{P_p} = 0,06383\ K/W \tag{5.10}$$

Решавањем система једначина (5.6) – (5.10) добија се вредност специфичне топлотне проводности изолационог материјала $\lambda = 0,03$ (W/(m·K)).

У случају када постоји ветар изрази (5.3), (5.4) и (5.5) постају

$$R_d^T = \frac{1}{\alpha_p S_d} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_d} + \frac{1}{\alpha_v S_d} \tag{5.11}$$

$$R_{k1}^T = \frac{1}{\alpha_p S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_v S_k} \tag{5.12}$$

$$R_{k2}^T = \frac{1}{\alpha_p S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_p S_k} \tag{5.13}$$

Коришћењем израза (5.11), (5.12), (5.13), (5.1) и (5.2) долази се до вредности тражене снаге загревања у случају када је температура амбијента $\vartheta_{av}$ = -10°C и када су један дужи зид и један краћи зид изложени ветру $P_v$ = 497,36 W.

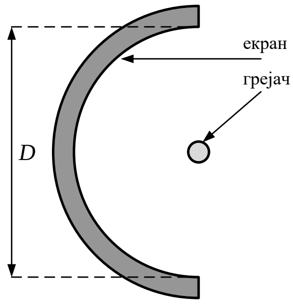
**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

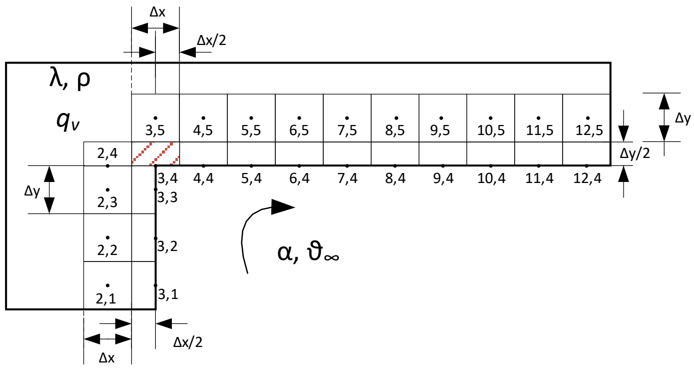
**Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута* 19. 9. 2022.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*
*Сваки задатак носи по 2 поена.*

1. На слици је приказан штапни грејач дужине $L$ = 80 cm, пречника $d$ = 1 cm и снаге 1 kW, са цилиндричним екраном пречника $D$ = 10 cm. Температура амбијента износи 20°C. Емисивности површи грејача и екрана износе 0,95 и 0,2, респективно. Сматрати да је температура по запремини танког екрана константна. Занемарити пренос топлоте струјањем са екрана и грејача на ваздух и ефекте крајева. Нацртати радијациону шему којом се моделује пренос топлоте и израчунати њене параметре.




2. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (3,4). Посматра се стационарно топлотно стање. По запремини постоји генерисања топлоте. Запреминском густином $q_v$. Топлотна проводност материјала је $\lambda$, густина $\rho$ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре $\vartheta_\infty$ је $\alpha$. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем.




3. Ребро за хлађење је ослољено на површ температуре 65,09°C. Између тела које се хлади и ребра постоји контактна отпорност $R_{th,c}$ = 1 K/W. Дужина ребра износи $L$ = 100 mm, а његов попречни пресек је облика правоугаоника $a$ x $b$ = 50 mm x 10 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре $\vartheta_a$ = 30°C износи $\alpha$ = 8 W/m$^2$K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи $\lambda$ = 237 W/mK. Написати једначине из којих се може израчунати снага одвођења топлоте са површи хлађене ребром. При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси ка ваздуху једнака нули.

4. Приказати дијаграм промене температуре у трансформатору - уља у намотајима, уља у радијатору и намотаја, укључујући и најтоплију тачку намотаја. Приказ дати за трансформатор са два намотаја различитих висина (почетак намотаја се налази на истој висини), различитих губитака и протока уља (различити су и вертикални градијенти температура) у сваком од њих, различитих градијената температуре намотај – уље у намотају и различитих фактора најтоплије тачке. До мешања уља из намотаја долази на координати висине вишег намотаја. На слици квалитативно приказати промене које настају уколико би проток уља кроз један намотај за $\Delta Q$ био већи, а кроз други намотај за за $\Delta Q$ мањи од претпостављеног. Сматрати да се при промени протока за $\Delta Q$ не мењају температура уља на уласку у намотаје, као ни температура помешаног уља (температура у термометарском џепу). Такође, сматрати да се не мењају ни следеће вредности за сваки од намотаја: губици, разлика средње температуре намотаја и уља у намотају и фактор најтоплије тачке намотаја.

5. Посматрајмо просторију димензија $a$ x $b$ = 5 m x 4 m, висине $h$ = 2,5 m. Температуру просторије је потребно загревањем одржавати на 20°C. Изнад и испод просторије, као и поред једног дужег и једног краћег зида се налазе загревани простори чија је температура 20°C. Одредити снагу загревања у случају да је температура амбијента -10°C и да је један дужи зид изложен ветру, а краћи зид није. Просторија је изолована материјалом специфичне топлотне проводности $\lambda$ = 0,03 (W/(m·K)), дебљине $d$ = 5 cm. Коефицијент преласка топлоте струјањем на унутрашњој страни и на спољашњој страни када нема ветра износи $\alpha_p$ = 5 (W/(m$^2$·K)), а на спољашњој страни када је она изложена ветру $\alpha_v$ = 20 (W/(m$^2$·K)).

**1. Задатак**

Испит 29.9.2021., задатак 2.

**2. Задатак**

Биланс снаге у стационарном топлотном стању за посматрани елемент (3,4) је:

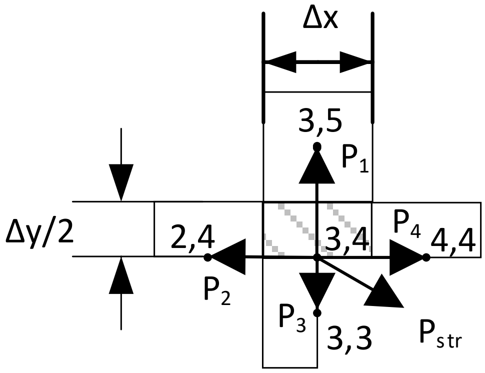
$$P_{gen} = P_{prenosa} \tag{2.1}$$

где су:

- $P_{gen}$ - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Снага којом се топлота генерише у елементу је

$$P_{gen} = q_v \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \tag{2.2}$$




Слика 2.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{2.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од четири члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 5), (2, 4), (3,3) и (4, 4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{4} P_k \tag{2.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,5}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{L\Delta x}} \tag{2.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{2,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{2,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{2.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y/2}{L\Delta x/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda L}\frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{2.7}$$

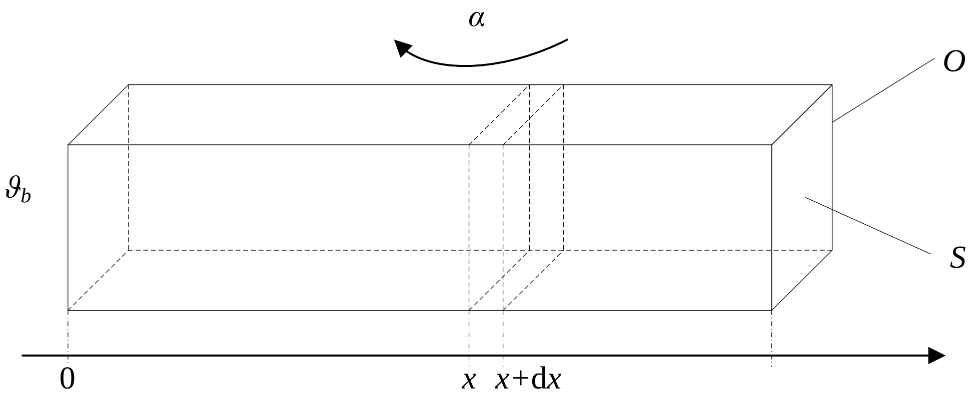
$$P_4 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{4,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{4,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{2.8}$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{L\Delta x/2}} = \frac{1}{2}\alpha L \Delta x \left(\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{\infty}^p\right) \tag{2.9}$$

**3. Задатак**

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине d*x*, на растојању *x* од тела на које је ребро ослоњено (слика 3.1) гласи:




Слика 3.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{3.1}$$

где је $q_x$ снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе *x* (на месту *x*), а d$q_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине d*x*. Зависност снаге провођења од координате *x* гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{3.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати *x*, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{3.3}$$

Израз (3.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине d*x* је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.4}$$

Уврштавањем у једначину (3.1) израза за диференцијал функције (3.3) и снаге преноса топлоте струјањем (3.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.7}$$

где је *m* параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{3.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

5. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати *x* = 0. Између базиса ребра и тела које се хлади постоји контактна топлотна отпорност тј. постоји пад температуре од $\vartheta_b$ до базиса ребра:

$$\frac{\vartheta_b - \vartheta(x=0)}{R_{th,c}} = q_{uk} \tag{3.9}$$

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_b - R_{pp}\, q_{uk} \tag{3.10}$$

5. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре $\vartheta_a$. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{3.11}$$

Након примене граничних услова (3.10) и (3.11) на израз (3.7) долази се до система од три једначине са три непознате: $C_1$. $C_2$ и $q_{uk}$. Укупна снага која се преноси преко ребра $q_{uk}$ износи:

$$q_{uk} = q(x=0) = -\lambda ab\, \frac{d\vartheta}{dx}(x=0) \tag{3.12}$$

Једначина (3.12) повезује величине $C_1$. $C_2$ и $q_{uk}$ и представља трећу једначину система три једначине са три непознате.

**4. Задатак**

Испит 3.7.2020., задатак 4.

**5. Задатак**

Снага загревања просторије једнака је снази која се, кроз два зида (један краћи и један дужи), одводи ка амбијенту:

$$P_{zag} = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T} \tag{5.1}$$

где је топлотни отпор $R^T$ једнак:

$$R^T = \left(\frac{1}{R_k^T} + \frac{1}{R_d^T}\right)^{-1} = \frac{R_k^T R_d^T}{R_d^T + R_k^T} \tag{5.2}$$

Топлотне отпорности зидова из (5.2) одређују се као

$$R_d^T = \frac{1}{\alpha_p S_d} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_d} + \frac{1}{\alpha_v S_d} \tag{5.3}$$

$$R_k^T = \frac{1}{\alpha_p S_k} + \frac{1}{\lambda}\frac{d}{S_k} + \frac{1}{\alpha_p S_k} \tag{5.4}$$

Заменом бројних вредности добија се: $R_d{}^T$ = 0,1533 K/W; $R_k{}^T$ = 0,2067 K/W; $R^T$ = 0,088 K/W; $P_{zag}$ = 340,81 W.